

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540124

研究課題名(和文)平均曲率流に対する近似問題と正則性・特異性に関する研究

研究課題名(英文)Studies on approximate problems, regularity and singularity for mean curvature flow

研究代表者

石井 克幸 (Ishii, Katsuyuki)

神戸大学・海事科学研究科(研究院)・教授

研究者番号：40232227

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では平均曲率で動く曲線・曲面(以下、平均曲率流と言う)に対する近似問題と正則性・特異性に関する研究を行った。平均曲率流に関する閾値型の近似アルゴリズムの収束について画像処理におけるモルフォロジー理論、等高面の方法、符号付き距離関数や粘性解理論を用いて証明した。

上記のアルゴリズムで構成した平均曲率流に対する広義解について、それが肥満化を起こさず、かつ広義解を表現する関数の勾配ベクトルが零でなければ、その近くでは正則になることを示した。余次元の高い平均曲率流に対する近似問題については解決の糸口が見つかり、今後の研究が期待できる。

研究成果の概要(英文)：In this research project we study some approximate problems, regularity and singularity for the motion of a curve or a surface by its mean curvature, called mean curvature flow. We study some threshold-type algorithms for mean curvature flow, which is proposed by Chambolle in 2004. We prove the convergence of his algorithm by using the mathematical morphology in image processing, the level-set method, the signed distance function and the theory of viscosity solutions. As an application, we prove the convergence to the planar motion of a curve by non-smooth interface energies.

As for the generalized mean curvature flow constructed by the above algorithms we show that if it does not fatten and the gradient of the auxiliary function of the generalized flow does not vanish, then the generalized motion becomes smooth near such portions. We obtain some idea to prove the convergence of an algorithm for mean curvature flow in higher codimension and can expect the future study.

研究分野：非線形解析

キーワード：平均曲率流 近似アルゴリズム 等高面の方法 粘性解 正則性 特異性

1. 研究開始当初の背景

(1) 平均曲率流は数学的な研究も盛んであるが、材料科学、相転移理論、画像処理等への応用やそれらを目的とした数値計算法についても活発に研究されている。平均曲率流に数値計算法に関して、BMO アルゴリズムと呼ばれる、熱方程式を用いた近似アルゴリズムはその簡明さから国内外の多くの研究者の注目を集め、その収束や一般化が考察されてきた。

(2) また、平均曲率流は曲面の面積汎関数に対する勾配流として与えられることも知られている。この勾配流の時間離散近似を基にした近似アルゴリズムも提案されており、その収束や一般化に関する研究もおこなわれてきた。

(3) これまでの研究によって、主に超曲面に対する平均曲率流の近似アルゴリズムに対する基本的な研究はほぼ完成したと言える。

2. 研究の目的

(1) 上記の成果を背景として以下の (2) - (4) が研究目的であった。

(2) 余次元の高い平均曲率流に対して BMO アルゴリズムを拡張した近似アルゴリズムを導入し、その収束について研究する。

(3) BMO アルゴリズムで構成される平均曲率流の広義解が肥満化しないための条件を調べる。そして広義解の正則性・特異性について研究する。

(4) 1. で述べた近似アルゴリズムを非等方的な場合や表面エネルギーが特異性をもつ非等方的平均曲率流の場合に拡張し、その収束について調べる。

3. 研究の方法

(1) 余次元の高い平均曲率流に対する近似アルゴリズムを BMO アルゴリズムを基に構成する。このときに扱う方程式は熱方程式の連立系となり、取り扱いが困難である。そのため、このスキームと同様の構造を持つと思われる Ginzburg-Landau 方程式系の解析手法を参考にして、熱方程式系の解の挙動を調べる。そこで、その極限を研究する際に粘性解理論等を用いる。

(2) BMO アルゴリズムで構成される平均曲率流の広義解の正則性・特異性等については半線形熱方程式や調和写像熱流に対する爆発解析を参考にして、単調公式や粘性解理論等を用いる。

(3) 非等方的な平均曲率流に対する近似アルゴリズムの収束に関しては、アルゴリズム

に現れる方程式に付随する変分問題、画像処理におけるモルフォロジー理論、等高面の方法や粘性解理論等を用いて研究する。

4. 研究成果

(1) 余次元の高い平均曲率流に対する近似アルゴリズムについては予想以上に困難な問題に直面したが、解決の糸口が見つかりつつある。今後の研究の進展が期待される。

(2) BMO アルゴリズムで構成される平均曲率流の広義解の正則性については、Evans - Spruck の結果 (1992) を利用することで、広義解が肥満化しておらず、かつ広義解を表現する関数の勾配ベクトルがゼロでなければ、その近傍では滑らかになっていることがわかった。

(3) 非等方的な平均曲率流に対する近似アルゴリズムの収束に関しては、モルフォロジー理論、等高面の方法や粘性解理論等を用いることで、アルゴリズムの収束の証明を与えることができた。更に、符号付き距離関数を用いた方法により、収束の別証明を与えるとともに、空間次元が 2 に限定されるが、表面エネルギー密度が滑らかでない場合の近似アルゴリズムの収束を証明することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 19 件)

¹ Ishii, K., An approximation scheme for the anisotropic and nonlocal mean curvature flow, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 21 (2014), no. 2, 219-252. (査読有)

² Naito, Y., Convergence rate in the weighted norm for a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity. Kodai Math. J. 37 (2014), no. 3, 646-667. (査読有)

³ Bae, S. and Naito, Y., Existence and separation of positive radial solutions for semilinear elliptic equations. J. Differential Equations 257 (2014), no. 7, 2430-2463. (査読有)

⁴ Naito, Y., Pasic, M., Tanaka S. and Zubrinic, D., Fractal oscillations near the domain boundary of radially symmetric solutions of p-Laplace equations. Fractal geometry and dynamical systems in pure and applied mathematics. II. Fractals in applied mathematics, 325-343, Contemp. Math., 601, Amer. Math. Soc., Providence,

RI, 2013. (査読有)

⁵ Naito, Y. and Pasic, M., Characterization for rectifiable and nonrectifiable attractivity of nonautonomous systems of linear differential equations. *Int. J. Differ. Equ.* 2013, Art. ID 740980, 11 pp. (査読有)

⁶ Naito, Y. and Senba, T., Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system in two dimensional space. *Commun. Pure Appl. Anal.* 12 (2013), no. 5, 1861–1880. (査読有)

⁷ Kawakami, T. and Ueda, Y., Asymptotic profiles to the solutions for a nonlinear damped wave equation. *Differential Integral Equations* 26 (2013), no. 7-8, 781–814. (査読有)

⁸ Eto, T., Ishii, K., Giga, Y., An area-minimizing scheme for anisotropic mean-curvature flow. *Adv. Differential Equations* 17 (2012), no. 11-12, 1031–1084. (査読有)

⁹ Eto, T., Ishii, K., Giga, Y., An area-minimizing scheme for anisotropic mean-curvature flow. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 88 (2012), no. 1, 7–10. (査読有)

¹⁰ Naito, Y., Remarks on singular Sturm comparison theorems. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 57 (2012), 109–122. (査読有)

¹¹ Naito, Y., The role of forward self-similar solutions in the Cauchy problem for semilinear heat equations. *J. Differential Equations* 253 (2012), no. 11, 3029–3060. (査読有)

¹² Naito, Y., Classification of second-order linear differential equations and an application to singular elliptic eigenvalue problems. *Bull. Lond. Math. Soc.* 44 (2012), no. 3, 545–562. (査読有)

¹³ Naito, Y. and Senba, T., Blow-up behavior of solutions to a parabolic-elliptic system on higher dimensional domains. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 32 (2012), no. 10, 3691–3713. (査読有)

¹⁴ Naito, Y., Pasic, M. and Usami, H., Rectifiable oscillations of radially symmetric solutions of p -Laplace differential equations. *Differ. Equ. Appl.* 4

(2012), no. 1, 11–25. (査読有)

¹⁵ Ueda, Y., Convergence rate to the stationary waves for viscous conservation laws with non-convexity on the half space. *Hyperbolic problems—theory, numerics and applications. Volume 2, 700–706, Ser. Contemp. Appl. Math. CAM, 18, World Sci. Publishing, Singapore, 2012.* (査読有)

¹⁶ Hashimoto, I. and Ueda, Y., The anti-derivative method in the half space and application to damped wave equations with non-convex convection. *Kyushu J. Math.* 66 (2012), no. 2, 479–492. (査読有)

¹⁷ Ueda, Y., Wang, S. and Kawashima, S., Dissipative structure of the regularity-loss type and time asymptotic decay of solutions for the Euler-Maxwell system. *SIAM J. Math. Anal.* 44 (2012), no. 3, 2002–2017. (査読有)

¹⁸ Ueda, Y., Duan R. and Kawashima, S., Decay structure for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation and its application. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 205 (2012), no. 1, 239–266. (査読有)

¹⁹ Hashimoto, I. and Ueda, Y., Asymptotic behavior of solutions for damped wave equations with non-convex convection term on the half line. *Osaka J. Math.* 49 (2012), no. 1, 37–52. (査読有)

{学会発表}(計 28 件)

¹ 石井克幸, Convergence of a threshold-type algorithm for curvature-dependent motion of hypersurfaces, 応用数学セミナー, 2014 年 10 月 27 日, 東北大学理学研究科 (宮城県)

² 石井克幸, Rate of convergence of an algorithm for curvature-dependent motion of hypersurfaces, 抽象的發展方程式から見た偏微分方程式に関する評価方法の再考, 2014 年 10 月 24 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府).

³ 内藤雄基, Threshold solutions for semilinear heat equations with polynomial decay initial data, 九州関数方程式セミナー, 2014 年 10 月 3 日, 九州大学 (福岡県)

⁴ 内藤雄基, Critical phenomena in the separation property for semilinear elliptic equations, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学 (広島県)

5 Naito Yuki, Threshold solutions for semilinear heat equations with polynomial decay initial data, 6-th Euro-Japanese Workshop on Blow up, 2014 年 9 月 3 日, 東京工業大学 (東京都).

6 内藤雄基, 非線形熱方程式に対する Cauchy 問題の解の漸近的性質, 東京工業大学大岡山談話会, 2014 年 6 月 4 日, 東京工業大学 (東京都).

7 上田好寛, 非対称な緩和項を持つ対称双曲型方程式系の減衰構造の解析, 幾何セミナー, 2014 年 12 月 6 日, 神戸大学 (兵庫県)

8 上田好寛, Asymptotic stability of stationary solutions for the non-isentropic Euler-Maxwell system, 第 65 回埼玉大学解析ゼミ, 2014 年 11 月 27 日, 埼玉大学 (埼玉県)

9 Ueda Yoshihiro, Dissipative property for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation, Workshop on Mathematical Sciences, 2014 年 8 月 31 日, Wayamba University of Sri Lanka (スリランカ)

10 Ueda Yoshihiro, Analysis of hyperbolic system with relaxation and the application for Euler-Maxwell system, Coloquilo, 2014 年 8 月 6 日, University of Concepcion (チリ)

11 Ueda Yoshihiro, Analysis of hyperbolic system with relaxation and its application, Coloquilo, 2014 年 8 月 3 日, LNCC (ブラジル)

12 Ueda Yoshihiro, Existence of the stationary solution and its asymptotic stability for non-isentropic Euler-Maxwell system, 15th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications, 2014 年 7 月 30 日, IMPA (ブラジル)

13 Ueda Yoshihiro, Decay structure of the regularity-loss type and the asymptotic stability for the Euler-Maxwell system, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014 年 7 月 10 日, ICMAT (スペイン)

14 上田好寛, 非対称な緩和項を持つ対称双曲型方程式系の消散構造の解析とその応用, 京都駅前セミナー ~ 非線形現象の数理を考える, 2014 年 6 月 13 日, キャンパスプラ

ザ京都 (京都府)

15 上田好寛, Euler-Maxwell 方程式系に現れる定常解の存在と漸近安定性, 解析セミナー, 2014 年 4 月 25 日, 神戸大学 (兵庫県)

16 Ishii Katsuyuki, Mathematical analysis to some approximate problems for mean curvature flow, Seminaire d'Analyse, 2014 年 2 月 4 日, Université François - Rabelais de Tours (フランス)

16 Ishii Katsuyuki, Convergence of an approximation scheme for the mean curvature flow and its application, Seminaire d'analyse numerique, 2013 年 9 月 19 日, Université de Rennes I (フランス)

17 石井克幸, On the convergence of an algorithm for the anisotropic mean curvature flow and its application to the crystalline curvature flow in the plane, 室蘭工業大学応用解析セミナー, 2013 年 5 月 24 日, 室蘭工業大学 (北海道)

18 石井克幸, 変分法に基づく平均曲率流の近似問題について, 解析セミナー, 2013 年 4 月 23 日, 神戸大学 (兵庫県)

19 Naito Yuki, Global attractivity in the weighted norm for a supercritical semilinear heat equation, 2014 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2014 年 3 月 28 日, Pusan National University (韓国)

20 内藤雄基, Separation structure of positive radial solutions for semilinear elliptic equations, 振動理論ワークショップ-金沢 2014 -, 2014 年 3 月 9 日, 金沢大学サテライトプラザ (石川県)

21 Naito Yuki, Separation structure of positive radial solutions for semilinear elliptic equations, The 2nd Hanbat PDE Conference, 2013 年 4 月 16 日, Hanbat National University (韓国)

22 Ueda Yoshihiro, Decay property for symmetric hyperbolic systems with non-symmetric relaxation, Mathematical seminar, 2013 年 5 月 22 日, The Chinese academy of sciences institute (中国)

23 上田好寛, Dissipative structure of the regularity-loss type and the asymptotic stability for the Euler-Maxwell system, 愛媛大学解析セミナー, 2013 年 6 月 7 日,

愛媛大学 (愛媛県)

24 上田好寛, 非対称な緩和項を持つ対称双曲型方程式系減衰構造の解析とその応用, 松江セミナー, 2013年6月14日, 島根大学 (島根県)

25 Ueda Yoshihiro, Asymptotic stability of stationary solutions of the non-isentropic Euler-Maxwell system, 流体と気体の数学解析, 2013年7月10日, 京都大学数理解析研究所 (京都府)

26 上田好寛, Existence of the stationary solutions and its asymptotic stability for non-isentropic Euler-Maxwell system, 偏微分方程式セミナー, 2013年12月2日, 北海道大学 (北海道)

27 Ueda Yoshihiro, Dissipative property for symmetric hyperbolic system with non-symmetric relaxation, Oberseminar Partielle Differentialgleichungen, 2014年2月6日, University of Konstanz (ドイツ)

28 Ueda Yoshihiro, Decay structure of the regularity-loss type and the asymptotic stability for the Euler-Maxwell system, IMA Workshop on Nonlinear PDE from Fluids and Related Topics, 2014年3月24日, The Chinese University of Hong Kong (香港)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕
ホームページ等

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

石井 克幸 (ISHII, Katsuyuki)
神戸大学・大学院海事科学研究科・教授
研究者番号 : 40232227

(2) 研究分担者

内藤 雄基 (NAITO, Yuki)
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号 : 10231458

上田 好寛 (UEDA, Yoshihiro)

神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授
研究者番号 : 50534856

(3) 連携研究者

高橋 太 (TAKAHASHI, Futoshi)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 10374901

桑村 雅隆 (KUWAMURA, Masataka)
神戸大学・大学院人間発達環境学研究科・教授
研究者番号 : 30270333

大沼 正樹 (OHNUMA, Masaki)
徳島大学・ソシオ・アーツ・サイエンス研究部・准教授
研究者番号 : 90304500

赤木 剛朗 (AKAGI, Goro)
神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授
研究者番号 : 60360202

石渡 哲哉 (ISHIWATA, Tetsuya)
芝浦工業大学・システム理工学部・准教授
研究者番号 : 50334917