様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２７年　６月　２日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１２５

研究課題名（和文）算術の超準モデルと不完全性定理

研究課題名（英文）Non-standard models of arithmetic and the incompleteness theorems

研究代表者
菊池　誠（Kikuchi, Makoto）

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号：６０２７３８０１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：まず，ベリーの逆理に基づく幾つかの不完全性定理の関係を明らかにした．次に，様相論理を用いて嘘つき型の逆理という概念を定めて嘘つき型の逆理に基づく算術の独立命題の存在を示した．また，ペアノ算術が矛盾する算術の超準モデル上でのペアノ算術の定理の集合を調べ，そのようなモデル上での算術の完全な理論の定義可能性を示した．さらに，不完全性定理の一般化を与えて，数学的証明の形式化とヒルベルトのプログラムの新たな関係を示した．

研究成果の概要（英文）：Firstly, we showed relationships between some proofs of the incompleteness theorems based on Berry's paradox. Then, we defined the concept of liar-type paradox by using modal logic and showed the existence of the arithmetical independent statements based on liar-type paradoxes. Thirdly, we investigated the set of theorems of Peano arithmetic on non-standard models of arithmetic on which Peano arithmetic is inconsistent, and showed the definability of complete theories of arithmetic on such models. At last, we gave generalizations of the incompleteness theorems, and indicated a new relationship between formalization of mathematical proofs and Hilbert's program.

研究分野：数学基礎論

キーワード：不完全性定理　超準モデル　算術　様相論理　逆理

１．研究開始当初の背景

1931 年に証明された Gödel の不完全性定理は，数学以外からも強い関心を持たれている数学基礎論における最も古典的で基本的な定理である． 現在までに Gödel 自身による不完全性定理の証明は詳細に分析されていおり，また，不完全性定理の様々な別証明も得られている．しかし，不完全性定理において中心的な役割を持つ可証性述語の数学的性質や，不完全性定理と情報科学や哲学などの関連する分野との関係については未だ十分には解明されていない．

歴史的には不完全性定理は，数学の基礎に関わる形式主義における Hilbert のプログラムと密接な関係が深い．この Hilbert のプログラムが数学を形式的に展開できる体系の無矛盾性を有限的手法で証明することを目的とするものである．ペアノ算術 PA は無矛盾であるという主張 Con(PA)は正しいと信じられているため理論 PA+¬Con(PA)は数学の基礎として不適格であると考えられること，超準モデルの概念は有限的手法の枠組みを超えることから，このような理論や超準モデルと不完全性定理の関係には十分な議論がなされていない．

しかし，PA が無矛盾であることを数学的に解明するためには，PA が矛盾するという状況を理解する必要がある．そして，その理解のためには PA+¬Con(PA)の超準モデルを考えることが有効である．また，日常的には矛盾する主張が有意味であり，その背後に何らかの秩序や整合性があることは珍しくない．現実の問題について論じるためには矛盾を忌避せずにその内容や背後にある秩序を分析する必要があり，近年，そのような意味や秩序を分析する論理的な枠組みとして矛盾許容型論理と呼ばれるものも提案されている．PA+¬Con(PA)の超準モデルの構造を調べることは，そのような分析の手がかりになることが期待される．

２．研究の目的

「この文は偽である」という文は真としても偽としても矛盾するというのが「嘘つきの逆理」である．Gödel は「嘘つきの逆理」を形式化することで不完全性定理の証明した．また，「100 字以内では定義できない最小の自然数」が 100 字以内で定義されるという Berry の逆理を用いた不完全性定理の証明も知られている．このような逆理と不完全性定理の証明の一般的な関係を調べる．

理論 PA+¬Con(PA)のモデルはすべて超準モデルである．この PA+¬Con(PA)の超準モデルの構造を調べ，そのモデル上での PA の定理の集合を調べることで PA+¬Con(PA)の基本的な性質を明らかにする．また，そのモデルについての考察を通して Rosser による改良された第一不完全性定理の証明を分析し，PA+¬Con(PA)の超準モデル上で Rosser の可証性述語によって自然数集合上の真の概念が定義可能であるかどうかを調べる．さらに，不完全性定理の Σ_n 定義可能な理論への一般化を試みる．

ところで，不完全性定理の標準的な解釈は形式的な証明の概念によって数学における証明の概念が完全に解明されていることが前提となっている．しかし，この形式化が十分であるかどうかは議論が必要である．そこで，形式的証明の概念が数学における証明の概念を十分に形式化していないことの可能性を検討する．また，計算可能関数の算術の論理式による表現可能性の証明の構造を明らかにする．

３．研究の方法

研究の目的の達成のためには，様々な数学的な知識や能力と哲学的な知見が必要である．そこで，国内外の数学および哲学の研究者と協力して，適宜，研究目的について研究討議や共同研究を行うことで研究を遂行する．また，研究を速やかに進めるためには最新の研究成果を取り入れ，かつ，研究経過および成果について様々な視点から検討することが必要である．そのために，研究目的関わる少人数の研究集会を開催する．

４．研究成果

(1)「Berry の逆理」を用いて Vopenka は集合論に関する第二不完全性定理を証明し，Chaitin は Kolmogorov 複雑性に基づく第一不完全性定理の証明を与えた．また，Boolos は「Berry の逆理」を形式化することで算術の真な文の集合の定義可能性に関する弱い第一不完全性定理の別証明を与えている．

Kikuchi and Tanaka および Kikuchi はそれぞれ，Boolos が与えた論理式が自然数を定義することの数学的な定義を与えなおすことで Boolos の証明を改良した．この改良についてまず，Kikuchi and Tanaka による Boolos の証明の改良は Vopenka による集合論に関する不完全性定理を算術に書き換えたものであることを示した．また，算術の公理系はある種の万能 Turing 機械を定めるという見方を提示することで，Kikuchi による Boolos の証明の改良は Chaitin の証明の特殊な場合であると見なせることを示した．

本研究は倉橋太志，酒井拓史との共同研究である．

(2) 様相演算子□を用いて命題 p が真であることを □p と書くことにする．この□は全ての命題 p について p⇔□p が同値になることが期待される．この□を用いると「嘘つきの逆理」は数学的には，命題 p が p⇔¬□p を満たすとすると，p⇔¬□p および p⇔□p という二つの命題から p⇔¬p という矛盾する命題が導かれることである．この現象が逆理に見えるのは p⇔¬□p という命題が無矛盾で p の定義としては妥当であると感じられるからである．実際，この命題は様相論理の体系 GL

等の上で無矛盾である．

矛盾する命題論理式の部分式の幾つかに□を付加することによって得られて，GL 等と無矛盾な様相論理式を「嘘つき型の逆理」と定義する．このとき，どのような矛盾する古典命題論理の論理式でも，その論理式の部分式に適当に□を付加すると嘘つき型の逆理が得られること，嘘つき型の逆理から算術の独立命題が得られること，これらの議論が述語論理に拡張可能であること，および，よく知られた逆理の多くが嘘つき型の逆理であることを示した．

また，嘘つき型の逆理は自己言及の概念と深く関わるが，逆理をもたらす自己言及性は明示的なものと非明示的なものに分類できることを示した．

本研究は倉橋太志との共同研究である．

(3) N を自然数の標準モデル，Pr(x)を PA の可証性述語とする．M が PA のモデルのとき，Th(M) = {φ: M 上で Pr(φ)は真}と定める．一般に M が PA+Con(PA)のモデルなら Th(M)は不完全であり，M が K の終拡大ならば Th(K)⊂Th(M)となるので Th(N)⊂Th(M)である．

M を PA のモデルとする．一般に Th(M)の要素でないφが存在することと，M が Con(PA)のモデルであることが同値である．Th(M)が Th(N)よりも真に大きくなる PA+Con(PA)のモデル M が存在することが簡単に証明できる．X={Th(M): M は PA+Con(PA)のモデル}とし，Con^2(PA)= Con(PA+Con(PA))とする．X は包含関係に関して極大元を持つ．このとき，次の二つの定理を証明した．

定理．M を PA+Con(PA)のモデルとする．Th(M)が Th(N)よりも真に大きいとき，Th(M)の要素であり Th(N)の要素でない真なΠ_1文と偽なΣ_1文が存在する．

定理．Th(M)が X の極大元であれば M は ¬Con^2(PA)のモデルである．また，Th(M)が X の極大元でない PA+ Con(PA)+¬Con^2(PA)のモデル M が存在する．

さて，Gödel の第二不完全性定理により，文 Con(PA)は PA からは証明できない．従って完全性定理により PA+¬Con(PA)のモデルが存在する．このようなモデルに関して，次の二つの定理を証明した．

定理．K が M の始切片で PA+Con(PA)のモデルであれば Th(K)=Th(N)となる PA+¬Con(PA)のモデル M が存在する．

定理．M のどのような始切片 K をとっても，K≠N ならば Th(K)≠Th(N)となる PA+¬Con(PA)のモデル M が存在する．

本研究は倉橋太志との共同研究である．

(4) Tarski は全ての文φについて N 上でφ⇔Tr(φ)が同値になるとき論理式 Tr(x)は真であることを意味すると定め，この Tr(x)は算術の論理式としてはて定義可能でないこと，すなわち N 上では N 上での真偽は算術的には定められないことを示した．つまり，TA={φ: N 上でφは真}と定めると，TA={φ: N 上で Tr(φ)は真}を満たす論理式 Tr(x)は存在しない．

ただし，N 上で超準モデル M 上の真偽を定めることは可能である．つまり，{φ: M 上でφは真}={φ: N 上で Tr(φ)は真}となる算術の論理式 Tr(x)と PA の超準モデル M が存在する．これに対して，適当に超準モデル M と論理式 Tr(x)を定めると，M 上で Tr(φ)が真であることと N 上でφが真であることが同値になる．つまり，TA={φ: M 上で Tr(φ)は真}となる算術の論理式 Tr(x)と PA の超準モデル M が存在する．

さて，T を PA の再帰的に公理可能な拡張とし，Pf(x,y)を「y は Gödel 数 x の論理式の T からの証明の Gödel 数である」を意味する証明述語とする．Gödel は T の可証性述語 Pr(x)を∃yPf(x,y)と定義した．Gödel はこの可証性述語を用いて，T がω無矛盾なら T は不完全であることを示した．Rosser は新しい可証性述語 Pr^R(x)を論理式∃y(Pf(x,y)∧∀z<y¬Pf(¬x,z))と定め，この新しい可証性述語を用いて T は無矛盾ならば不完全であることを示した．

M を PA+Con(PA)のモデルとする．M 上で∀x(Pr(x)⇔Pr^R(x))は真である．従って，M の上では Rosser の可証性述語と Gödel の可証性述語に違いはない．一方，M が PA + ¬Con(PA)のモデルである場合は，M の上では全ての文φについて Pr(φ)が真であるのに対して，M 上で Pr^R(φ)は真になるとは限らない．このような M に対して Th^R(M)={φ: M 上で Pr^R(φ)は真}と定めると，この Th^R(M)が無矛盾で完全になる可能性がある．この Th^R(M)について，次の定理を証明した．

定理．以下の条件を満たすように証明述語 Pf(x,y)を定義できる．(i) Pr(x)を Gödel の可証性述語とするとき，PA 上で∀x(Pr(x)⇔∃yPf(x,y))が証明可能である．(ii) T を PA の無矛盾な完全拡大とすれば，T=Th^R(M)となる PA+¬Con(PA)の超準モデル M が存在する．

この定理で存在が示された Pf(x,y)を用いると次の系が得られる．つまり証明可能性述語の定め方によっては，Rosser の可証性述語は PA のある超準モデル上で TA を定める．

系．TA=Th^R(M)となる PA+¬Con(PA)の超準モデル M が存在する．

本研究は倉橋太志との共同研究である．

(5) 不完全性定理はΣ_1定義可能な算術で成り立つ普遍的な定理である．この普遍性は不完全性定理の標準的な解釈において重要な役割を持つが，Σ_1定義可能性をさらにΣ_n定義可能性に一般化することにはあまり関心が持たれていない．これは，Σ_1定義可能性が計算可能性と密接な関係を持ち，不完全性定理の標準的な解釈では計算可能性が重要な役割を果たしていること，Σ_2定義可能かつ無矛盾で完全な PA の拡張が存在するので，不完全性定理に関わる議論は直接にはΣ_n定義

可能な理論には一般化できないこと，さらにそのような無矛盾で完全な拡大はNをモデルに持たず，自然数概念を形式的に議論する枠組みとしては不適格であることによる．しかし，これらの理由は数学的な価値観というよりは不完全性定理に関わる古典的で哲学的な議論の枠組みに関わるものである．そして，不完全性定理の定式化を変更すれば不完全性定理は一般化可能である．以下，T を算術の理論とする．

Gödel の第一不完全性定理は「T はΣ_1定義可能かつ無矛盾ならばΠ_1完全でない．また，T はΣ_1定義可能かつΣ_1健全なら不完全である」と言い換えることができる．また，Rosser の不完全性定理は，この定式化のもとでの Gödel の第一不完全性定理の後半部分を「T はΣ_1定義可能かつΣ_0健全なら不完全である」という主張に強めたものであると言い換えることができる．この定式化について次の定理を証明した．

定理．T はΣ_{n+1}定義可能かつ無矛盾ならばΠ_{n+1}完全でない．また，T はΣ_{n+1}定義可能かつΣ_n健全ならば不完全である．なお，この一般化は最良である．

さて，Σ_n論理式に対する反映原理を RFN(Σ_n)と書く．Gödel の第二不完全性定理は「T はΣ_1定義可能とする．このとき，T がΣ_0健全であることと，T 上で RFN(Σ_0)が証明できないことが同値である」と言い直せる．この定理は次のように一般化できる．

定理．T はΣ_{n+1}定義可能とする．このとき，T がΣ_n健全であることと，T 上で RFN(Σ_n)が証明できないことが同値である．

本研究は倉橋太志との共同研究である．

(6) 数学における証明の概念は述語論理において形式化されており，この形式化が成功したことの根拠となるものが Gödel の完全性定理である．しかし，完全性定理のもとでも証明の概念が完全に理解され形式化されたと言えるかについては議論の余地がある．そして多くの場合，もしもこの形式化が不十分であるとするのなら，人間の論理的な能力には未だ解明されていないものがあるという可能性が考えられる．しかし，不完全性定理に関わる様々な状況を顧みるとき，形式化された証明の概念はむしろ本来の証明の概念よりも広い可能性がある．この可能性を意識しながら Hilbert のプログラムを再検討すると，不完全性定理と Hilbert のプログラムの新たな関係が見えてくることを明らかにした．また，計算可能な関数の表現可能性については，再帰的可算な集合のΣ_1定義可能性が重要な役割を持つことを明らかにした．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Makoto Kikuchi, Taishi Kurahashi, Hiroshi Sakai, On proofs of the incompleteness theorems based on Berry's paradox by Vopenka, Chaitin, and Boolos, Mathematical Logic Quarterly, 査読有, 58, 2012, 307–316

〔学会発表〕（計５件）

① 倉橋太志，菊池誠，Σ_n定義可能な算術の不完全性定理，日本数学会 2015 年度年会，2015.3.22，明治大学（東京都）

② 菊池誠，状況理論としてのチャンネル理論，科学基礎論学会秋の研究例会，2014.11.1，東京大学（東京都）

③ 菊池誠，渕野昌，不完全性定理の構成的性質について，日本数学会 2014 年度秋季総合分科会，2014.9.27，広島大学（広島県）

④ 菊池誠，倉橋太志，算術の超準モデルにおける定理と証明について，日本数学会 2014 年度秋季総合分科会，2014.9.27，広島大学（広島県）

⑤ 菊池誠，倉橋太志，嘘つき型の矛盾による不完全性定理の証明について，日本数学会 2013 年度秋季総合分科会，2013.9.27，愛媛大学（愛媛県）

〔図書〕（計１件）

① 菊池誠，共立出版，不完全性定理，2014，368

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

菊池　誠（KIKUCHI，Makoto）

神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授

研究者番号：６０２７３８０１

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし