

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540131

研究課題名(和文)テンソルデータの階数問題とテンソル多変量解析の展開

研究課題名(英文)Tensor rank problem and multivariate analysis of tensor normal distributions

研究代表者

坂田 年男 (Toshio, Sakata)

九州大学・芸術工学研究科(研究院)・教授

研究者番号：20117352

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：統計学におけるテンソルとは高次元配列データのことであり、行列データの拡張概念である。テンソルを最も基本的な階数1のテンソルの和にあらわすときの最小の長さをそのテンソルの階数という。さらに特定の階数を持つテンソルの集合が正の測度をもつとき典型階数と呼ばれる。本研究は(m,n,p)型の3-テンソルの典型階数について研究を行い、絶対正則テンソル、絶対列充足階数テンソル、正則な双線形写像、行列式イデアルなどの概念と結び付けて、典型階数が複数存在するか単一に存在するかの問題に対する解答を部分的に与えた。また、行列型正規分布の平均の片側検定に対する相似検定の研究も併せて行い構成した。

研究成果の概要(英文)：In statistics, a tensor means a multi-way array and it is an extension of matrix. To grasp the meaning of the datum, we decompose the tensor into a sum of rank one tensors, where rank one tensors are the most simple tensors. The rank of a tensor T is the minimum length of such sum of rank one tensors to express T. A tensor rank is called a typical rank if the tensors with the rank has a positive measure. From a view of data analysis, typical rank is an important concept. In this study, we considered the typical ranks of (m,n,p) type 3-tensors. By using the concepts of absolutely nonsingular tensor, absolutely full column rank tensors and nonsingular bilinear form, determinantal ideal, we decided partially whether there is one typical rank or there are plural typical ranks over the real number field. Also we studied and constructed the one-sided similar test for the mean matrix of matrix type normal distributions.

研究分野：数理統計学

キーワード：3-tensors typical rank bilinear forms determinantal ideal matrix normal similar test

1. 研究開始当初の背景

多重配列であるテンソルは行列の拡張概念であり、その解析法は、近年、因子分析や画像解析を含めた様々な応用分野で注目を集めているデータ解析手法である。

(1) そこでテンソルデータの複雑性の指標であるテンソルの階数の概念がモデルを構築する上で重要となる。テンソルの階数は行列と同様に定義され、与えられた次元の組(サイズ)に対応するテンソルの集合の最大階数が注目されている。さらに階数はその階数をもつテンソルの集合が正の測度を持つとき典型階数と呼ばれる。データ解析的にはどちらかというとき典型階数が重要である。最大階数も典型階数も一般に決定するのは困難であるため、もっぱら(m,n,p)型の3-テンソルに関する研究が行われているのが実情である。テンソルの最大階数および典型階数の研究は諸外国でも一部の熱心な研究者の研究が継続的に行われており、サイズ(m,n,p)を持つ3-テンソルの典型階数は  $m=2$  の場合はよく知られていた。また  $n \geq m \geq 3$  の場合で  $(m-1)n < p$  の場合は典型階数が  $\min\{p, mn\}$  であることが知られていた。

(2) また、応用上、データ解析の基本は正規分布の仮定の下での統計解析であり、ベクトル型の正規分布が通常の多変量解析であり、この拡張として行列型の正規分布、テンソル型の正規分布の下での推測理論が次第に研究されるようになってきていた。

2. 研究の目的

(1) 未解決の問題である最大階数および典型階数を様々な次元の組の3-テンソル

に対して決定すること。できれば、決定のための一般論を構築すること。

(2) また、行列型およびテンソル型正規分布に対する多変量解析、中でも片側検定理論を構築すること。

3. 研究の方法

(1) テンソルをスライス表現したとき、行列式多項式が定義される。この行列式多項式をもとに絶対正則テンソル、その拡張としての絶対列充足階数テンソルが定義できる。これらの概念、および正則双線形写像、行列式イデアルの概念を用いて、典型階数の決定のための理論を構築する。

(2) さらに、応用研究としては多変量正規分布を拡張した行列正規分布、テンソル正規分布に関する平均推測理論を片側検定の枠組みで構築する。

4. 研究成果

(1) 典型階数の決定について次の成果を得た。

1  $(m-1)n=p$  の場合に正則な双線形写像  $f: R^{\{m\}} \times R^{\{n\}} \implies R^{\{n\}}$  が存在しないならば典型階数は  $\{p\}$ 、存在する場合は  $\{p, p+1\}$  であることを示した。とくに後者となる条件を Hurwitz-Radon 関数によって与えた。

2 また、いくつかの  $(m, n, p)$  の組に対して絶対列充足階数テンソルの概念を用いて複数の典型階数を持つことを示した。

さらに、 $(m-1)(n-1)+1 \leq p \leq (m-1)n$  の場合への拡張を考察した。そして次の事実を明らかにした。

3  $m, n \geq 3, (m-1)(n-1)+2 \leq p \leq mn$  の場合  $R^m \times R^n$  から  $R^{(mn-p)}$  への正則な双線形写像が存在することが複数の典型階数をもつ必要十分条件である。

4  $m, n \geq 3, k \geq 2, (m-1)(n-1)+k=p$  のときに典型階数を完全に決定した。

5  $m, n \geq 3, (m-1)(n-1)+1=p$  の場合に対して複数の典型階数の存在する条件を与えた。

(2) 1  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  テンソル複素数テンソルの最大階数が4であることの Brylinski の結果の別証明を与えた。

2  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  実テンソルの最大階数が5で典型階数が  $\{4, 5\}$  であることを理論および数値的に示唆した。

3  $2 \times 2 \times \dots \times 2$  に対する階数の上界を与えた。

(3) また行列-テンソルの正規分布の平均の片側検定についても岩佐氏との共同研究で考察した。

1 行列正規分布の平均Mについて片側検定問題  $H: AMB=0$  vs  $K: AMB \geq 0$  に対して、分散行列(と のクロネッカー積)の未知、既知の場合に similar 検定を導いた。

2 行列正規分布の平均Mについて片側検定問題  $H: AMB=0$  vs  $K: AMB \geq 0$  に対して、分散行列(と のクロネッカー積)の未知、未知の場合に similar 検定を導いた。

(4) さらに、最終年度のまとめとなるテンソル(高次元配列)データ解析の理論と応用の2冊の書籍を出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

1 Toshio Sakata, Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Kazumitsu Maehara, An algorithm finding  $4 \times 4 \times 3$  absolutely nonsingular tensors based on the Cayley form of orthogonal matrices, 査読あり, Contemporary Topics in Mathematics and Statistics with Applications, vol. 1, 2012, 199-210.

<sup>2</sup> Toshio Sumi, Toshio Sakata, Mitsuhiro Miyazaki, Typical ranks for  $m \times n \times (m-1)n$  tensors with  $m \leq n$ , Linear Algebra and Its Applications, 査読あり, vol. 438, 2013, 953-958

<sup>3</sup> Manabu Iwasa, Toshio Sakata, One-sided tests for matrix valued normal distributions, 査読あり, Proceedings of MSAST 2013, vol2, 2013, 79-91

<sup>4</sup> Toshio Sumi, Toshio Sakata, Mitsuhiro Miyazaki, Rank of tensors with size  $2x \cdot \cdot \cdot x 2$ , 査読あり, Far east Journal of Mathematical Science, vol. 90(2), 2014, 141-162.

<sup>5</sup> Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Toshio Sakata, Typical ranks of  $m \times n \times (m-1)n$  with  $3 \leq m \leq n$  over the real number field, 査読あり, Journal of Linear and Multi-linear Algebra, vol. 63(5), 2015, 940-955

<sup>6</sup> 坂田年男, 角俊雄, 宮崎充弘, 前原貴憲 テンソルの階数問題について(計算代数的視点から), 査読あり, 日本統計学会誌, 44 巻(2), 2015, 409-450.

[学会発表](計 16 件)

<sup>1</sup> Mitsuhiro Miyazaki, Toshio Sumi, Toshio Sakata, Absolutely full column rank tensors and typical ranks of tensors, IMS-APRM 2012, 2012.07.2 ~ 07.04, 筑波国際会議場,

<sup>2</sup> Toshio Sakata, Rieko Sakurai, Manabu Iwasa, Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, A Programming to Calculate a Groebner Basis with R, 6-th ERCIM working Group on Computing and Statistics, 2012.12.01 ~ 012.03. Oviedo, Spain.

<sup>3</sup> Rieko Sakurai and Toshio Sakata, Holonomic Decent Minimization Method for Restricted Maximum Likelihood Estimation, 59th ISI World Statistics Congress, 2013.08.25 ~ 08.30, Hong Kong, China.

<sup>4</sup> Toshio Sakata, Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Estimation of the typical ranks of  $2 \times 2 \times \dots \times 2$  tensors through intrinsic dimension estimators, ERCIM2013, 2013.12.14 ~ 12.12.16, London, England.

<sup>5</sup> Manabu Iwasa and Toshio Sakata, One-Sided Tests for Matrix Variate Normal Distributions, MSAST 2013, 2013.12.21 ~ 12.23, Kolkata, India.

<sup>6</sup> Manabu Iwasa, Toshio Sakata, One-sided tests for matrix and tensor variate normal distributions, 3<sup>rd</sup> APRM

2014, 2014.06.29 ~ 07.04, Taipei, Taiwan.

<sup>7</sup> Mitsuhiro Miyazaki, Toshio Sumi, Toshio Sakata, typical ranks of 3-tensors over the real number field and Hurwitz-Radon function, 3rd APRM2014, 2014.06.29 ~ 07.04, Taipei, Taiwan.

<sup>8</sup> Toshio Sakata, Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Tensor ranks form computational algebraic methods, Algebraic statistics, 2014.07.14 ~ 07.17, NIMS, Daejeon, South Korea.

<sup>9</sup> Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Toshio Sakata, Monomial preorder, ideals of minors, and plural typical ranks, Workshop on computational and algebraic methods in statistics, 2015.03.03 ~ 03.05, Yamagami Kaikan, Tokyo University.

<sup>10</sup> Manabu Iwasa, Toshio Sakata, Similar tests in one-sided testing problems for matrix variate normal distributions, IMS-China International Conference on Statistics and Probabilities, 2015.06.01 ~ 06.04, Kunming, China.

<sup>11</sup> Toshio Sakata, Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Verification of absolutely non-singularity of 3 tensors by positivity of a single variate characteristic function, 60-th ISI statistics congress, 2015.07.26 ~ 07.31, Rio de Janeiro, Brazil.

<sup>12</sup> Toshio Sakata, Kosuke Okusa, Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Groebner basis calculation over the finite fields  $GF(p)$  and its application to tensor rank determination problem, IASC satellite conference 2015, 2015.08.02 ~ 08.04, Buzios, Brazil.

<sup>13</sup> Mitsuhiro Miyazaki, Toshio Sumi, Toshio Sakata, About typical ranks of real tensors, SIAM conference on applied algebraic geometry, 2015.08.03 ~ 08.07, NIMS, Daejeon, Korea.

<sup>14</sup> On the real radical of certain determinantal ideals and multiple typical ranks of 3-tensors over the real number field, International conference and 8<sup>th</sup> Japan-Vietnam Seminar on Commutative Algebra(招待), 2016.03.21 ~ 03.25, Ha Long, Vietnam.

<sup>15</sup> Mitsuhiro Miyazaki, Toshio Sumi, Toshio Sakata, Determinantal varieties

and typical 3-tensors, Application of algebraic methods to statistics(招待), 2016.0620~06.24, RIMS, Kyoto(決定済み).  
16 Mitsuhiro Miyazaki, Toshio Sumi, Toshio Sakata, Typical ranks of 3-tensors over the real number field and determinantal ideals, 4<sup>th</sup> APRM, 2016.06.27~06.30, Hong Kong, China (決定済み).

〔図書〕(計 2 件)

Applied Matrix and Tensor Variate Data Analysis, Toshio Sakata eds.,  
Authors:Kohei Adachi, Hirkozaku Kameoka, Kohei Inoue, Noboru Murata, Deniz Akdemir, Manabu Iwasa-Toshio Sakata, 平成 28 年 2 月, Springer Brief in Statistics, Springer Nature, total 136 pages.

2 Algebraic and Computational Aspects of Real Tensor Ranks, Toshio Sakata, Toshio Sumi and Mitsuhiro Miyazaki, 平成 28 年 3 月, Springer Brief in Statistics, Springer Nature, in total 108 pages.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

(注：退職により公的 Homepage 消滅)

6. 研究組織

(1)研究代表者 坂田年男  
( SAKATA Toshio )  
九州大学・芸術工学研究院・教授  
研究者番号：20117352

(2)研究分担者 角俊雄  
( SUMI Toshio )  
九州大学・基幹教育研究院・准教授  
研究者番号：50258513  
宮崎充弘

( MIYAZAKI Mitsuhiro )  
京都教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：90219767

(3)連携研究者 笹淵 祥一  
( SASABUCHI Syoichi )

九州大学芸術工学研究院  
研究者番号：20128028

栗木哲  
( KURIKI Satoshi )  
統計数理研究所  
研究者番号：90195545