様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：３２６４４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４０１４４

研究課題名（和文）平面上の重み付き点集合の組合せ的性質

研究課題名（英文）Combinatorial properties of weighted point sets in the plane

研究代表者
酒井　利訓（Sakai, Toshinori）

東海大学・高輪教養教育センター・教授

研究者番号：２０２６７８４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：Pは平面上の一般の位置にあるn個の点に1からnまでの各整数値を1つずつ割り当てた重み付き点集合とする。Pの何個かの点を頂点とする折れ線で，それに沿って頂点の重みが単調に増加(または減少)するものをPの単調道とよび，1辺を除くと周が単調無交差道となる単純多角形を単調多角形とよぶ。また，Pの部分集合Sについて，その凸包に含まれるPの点がSの点だけであるとき，SをPの島とよぶ。本研究では，単調多角形や単調無交差道が含む頂点数の最大値や単調多角形の頂点の重みの和の最大値，Pの凸包を単純多角形に分割する問題，与えられた値に近い重みをもつ島や複数の島の存在性などについて研究し，成果が得られた。

研究成果の概要（英文）：Let P be a set of n points in general position in the plane, with weights 1, 2, ..., n. A monotonic path is a path connecting points of P along which the weights of its vertices monotonically increase or decrease. A monotonic polygon is a simple polygon whose perimeter consists of a non-crossing monotonic path and an edge. A subset S of P is called an island if S consists of the points of P contained in the convex hull of S. We studied the problems concerning the maximum number of vertices contained in monotonic polygons or non-crossing monotonic paths; the maximum number of the sums of weights of vertices of monotonic polygons; the number of faces contained in a decomposition of the convex hull of P into monotonic polygons; the existence of an island with weight close to a given number; the existence of disjoint islands each of which has weight close to a given number; and so on. We also obtained some results concerning the islands of weighted point sets in d-dimensional space.

研究分野：離散幾何学

キーワード：重み付き点集合　単調多角形　単調無交差道　島

１．研究開始当初の背景

本研究では，平面上の一般の位置にある（つまり，どの３点も同一直線上にない）点からなる重み付き点集合 $P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$（$n=|P|$）の組合せ的性質を研究した。$P$ としては，点 p_i が重み i をもつものを主な研究対象とした。P の何個かの点を頂点とする自己交差のない折れ線で，それに沿って頂点の重みが単調に増加または減少するものを P の単調無交差道とよぶ。また，P の点を頂点とする単純多角形で，周から１辺を除くことにより単調無交差道になるものを単調多角形とよぶ。単調多角形や単調無交差道の重みとは，それらの頂点の重みの和のこととする。また，P の部分集合 S について，その凸包に含まれる点が S の点だけであるとき，S を P の島とよぶ（つまり，島 S とは，P の何点かを頂点とする凸多角形（単点や線分を含む）の頂点および内部の点からなる集合である)。島の重みとは，その島に含まれる点の重みの和のこととする。

重みの与えられていない点集合や，点を k 色で塗り分けた k 色点集合などに関する組合せ的性質は以前から活発に研究されてきた。それらのうちで代表的な問題は，1935 年に Erdős と Szekeres による論文で提起された「P が何点以上からなる点集合であれば，その中に凸 k 角形の頂点をなす k 点の存在が保証されるか」(Erdős–Szekeres の問題) というものである。この問題のバリエーションとして，凸 k 角形を「真空凸 k 角形」（内部に P の点を含まない凸 k 角形）で置き換えた問題や，頂点数のかわりに内部に含まれる点の個数を考える問題なども研究されてきた。k 色点集合（おもに２色点集合）に関しても，同色の頂点からなる真空凸 k 角形の存在性や，隣接する頂点の色が異なる交互道の頂点数の最大値などが研究されてきた。

一方，重み付き点集合における，それらに対応する組合せ的性質については，本研究の研究開始当初においては，あまりなされておらず，本研究の研究代表者（酒井）や研究協力者（海外共同研究者）(Urrutia) により，主に単調無交差道についての研究成果がいくつか得られていた段階であった。

研究代表者は，さらに，「$n(=|P|)$ がある定数以上であれば，P は重みがちょうど $2n$ の島を含むか」という問題を提起し，複数の研究者がこの問題に関心を寄せていた。

２．研究の目的

(1)単調多角形や単調無交差道

単調多角形や単調無交差道の頂点数の最大値や単調多角形の頂点の重みの和の最大値（の最小値）を決定することが大きな目的の１つであった。例えば頂点数については，数列に含まれる単調部分列に関する Erdős-Szekeres の定理（実数からなる項数 n の任意の数列は，項数が $\sqrt{n}$ 以上の単調部分列をもつ）を用いることで，P が頂点数 $(\sqrt{n}+1)/2$ 以上の単調多角形をもつことや頂点数 $\sqrt{n}$ 以上の単調無交差道が存在することはわかるが，最良と予想されている下界とはギャップがある。そこで，単調多角形を扱うための新たな着眼点や手法を見つけ，それらを用いて研究課題とした諸問題を解決する。単調多角形に「真空」や「凸」などの条件を付加することで問題のバリエーションが得られ，これらの問題にも取り組む。

上記の問題は「P がもつ部分的構造」に関する問題であるが，「P の全体的構造」に関する問題にも取り組む。その１つが，P の頂点どうしを結ぶ線分をいくつか用いて P の凸包を分割し，各領域が単調多角形になるようにする問題である。このような分割を P の凸包の単調多角形分割とよび，分割されてできる領域の個数の最小値について研究する。また，P を直和に分割して，各部分集合が単調多角形の頂点集合になるようにする際の，分割の個数の最小値についても研究する。得られる単調多角形どうしに重なりを許すか否かで２つの問題が考えられる。さらに，P の凸包の単調多角形分割の問題も単調多角形の頂点集合の直和への分割の問題も，「各単調多角形が凸である」という条件を課した場合や，P の点が凸の位置にある場合などのバリエーションにも取り組む。

(2)島の重み

P の点の重みの総和 $n(n+1)/2$ 以下の自然数 m を与えたとき，m にどの程度近い重みの島の存在性が保証されるか，また，島の重みとして何通りの異なる値を取るかなどについて研究する。この他に，指定された値に近い重みをもち，互いに素である島をできるだけ多く見つける問題などにも取り組む。

P の点を直線上に正射影することで，これらの問題を数列における連続する項からなる部分列の問題に帰着させることはできるが，最良と予想されている結果とはギャップのある結果しか得られない。そこで，重みの与えられていない点集合に対する既存の手法をどのように活用できるかを探りながら，この種の問題を扱うための手法を開発し，問題を解決していきたい。なお，島の重みとして取り得る値の総数については，P が凸の位置にあり，島として凸包の周上の連続する頂点からなるものに限定した場合の問題も研究する。

３．研究の方法

メキシコの Jorge Urrutia（Jorge Urrutia Galicia）とスペインの Ferran Hurtado（Fernando Hurtado）の２名の研究協力者（海外共同研究者）とともに共同研究を行った。３名の間で e-mail やビデオ会議による情報交換を随時行いつつ，毎年度一名または二名を招聘(Urrutia:2013 年１月 21 日〜2 月 2 日，

9 月 19 日〜9 月 25 日, 2014 年 1 月 16 日から 2 月 1 日, 2015 年 1 月 11 日〜1 月 26 日, Hurtado：2014 年 1 月 21 日〜1 月 30 日）したり，国際会議などの機会を利用したりすることで，共同研究を進めた。また，結果や手法を本研究に応用できそうな関連問題に対する他の研究者たちとの共同研究に参加することで，本研究課題の解決への手がかりを得ていく。

４．研究成果

以下において，とくに断らない限り，P の点は一般の位置にあるものとし，単調多角形には真空であるという条件は課していないものとする。また，対数の底は 2 とする。

(1) 単調多角形と単調無交差道の頂点数
前述したとおり，Erdős-Szekeres の定理を用いることで，P が頂点数 $(\sqrt{n}+1)/2$ 以上の単調多角形をもつことがわかるが，本研究により，$\sqrt{n-1}+1$ 以上の単調多角形をもつことが示された。この結果は，最良でもある。n が十分大きければ，真空単調凸四角形も存在するが，P が適当に重み付けされた Horton 集合の場合，P は真空単調凸五角形をもたない。

また，任意の P に含まれる単調無交差道の頂点数の最大値について，$c(\sqrt{n}-1)$（$c=\left(\sqrt{\sqrt{10/3}-1}+1/\sqrt{\sqrt{10/3}-1}\right)/2=1.0045\ldots$）以上であることが示された。この下界における $\sqrt{n}$ の係数は，自明な下界 $\sqrt{n}$ の係数 1 よりもわずかに大きいに過ぎないが，1 よりも真に大きいことが示せたことから，単調無交差道の頂点数の問題が，数列の単調部分列の問題と本質的に異なることが明確になった。なお，この研究の過程において，指定された点を通る単調無交差道の頂点数についての成果も得られた。例えば，$0.108n$ と $0.892n$ の間にある重みをもつ点に対して，その点を通り頂点数が $0.9\sqrt{n}$ 以上である単調無交差道が存在することや，P の点が凸の位置にある場合には，任意の点を通り頂点数が $\sqrt{2(n-1)}$ 以上の単調無交差道が存在することが示された。

(2) P の凸包の単調多角形分割
P の任意の 3 点を頂点とする三角形は単調多角形だから，P の任意の三角形分割は単調多角形分割であり，その領域の個数は，$2n-b-2$（b は凸包の頂点数）である。本研究では，領域の個数が $(7n+1)/4-b$ 以下である単調多角形分割の存在が示せた。なお，「各単調多角形が凸である」という条件を課した場合，領域の個数の最小値は $1.99784n-b-1$ よりも小さい。

P の点が凸の位置にある場合（三角形分割の領域の個数は $n-2$）には，簡単な考察により，領域の個数が $\lceil 3(n-2)/4 \rceil$ 以下の単調多角形分割が存在することがわかる。本研究では，領域の個数が $\lceil 2n/3 \rceil$ 以下である単調多角形分割が存在すること，および，これが最良であることが示された。

(3) 単調多角形の頂点集合の直和への分割
P を直和に分割して，各部分集合が単調多角形の頂点集合になるようにする。ただし，得られる単調多角形どうしに重なりがあることは許すものとする。単調多角形に対して，さらに凸性を条件に課した場合には，Erdős-Szekeres 問題に対する既知の事実を用いることで，単調多角形の個数を $(2+o(1))n/\log n$ 以下にできること，および，単調多角形の個数を $2n/(1+o(1))\log n$ より小さくできない P が存在することがわかる。

単調多角形の凸性を条件に課さない場合には，単調多角形の個数は $(2-o(1))\sqrt{n}$ 以下にできる。また，単調多角形の個数を $\lfloor\sqrt{n}\rceil$ より小さくできない P が存在する。

なお，多角形どうしの重なりを許さない場合については，単調多角形の個数の自明な上界として $\lceil n/3 \rceil$ が得られるが，これが最良でもあることを示す P が存在することがわかった。

P の直和分割の各部分集合が単調無交差道の頂点集合にすることに関しても，同様の問題を考えることができる。例えば，P が凸の位置にあり，単調無交差道どうしの重なりを許さない場合，単調無交差道の個数は $\lceil 2n/7 \rceil$ 以下にでき，また，$\lceil n/4 \rceil$ よりは減らせない P が存在する。

なお，本研究に関連して，重みの値を 2 個に限定した場合に相当する 2 色点集合に関する研究成果も得られている（S. Bereg 他 6 名との共同研究）。例えば，$|R|=|B|=n/2$（n は偶数）をみたす任意の 2 色点集合 $P=R\cup B$ に対して，R の点と B の点を 2 個ずつ含む真空四角形（凸でなくてよい）の個数が $(n^2-48n)/2$ 以上であることなどが示せた。また，重み付きでない点集合 P に対して，次をみたす点集合 Q の濃度などについても研究した（J. Cano 他 4 名との共同研究）：P の点を頂点とする真空凸五角形は Q の点を少なくとも 1 個含む。例えば，P が凸の位置にあり $n\equiv 0 \pmod 4$ のとき $|Q|\geq n/2-2$ で，また，$|Q|=n/2-2$ で十分な場合もあることなどが示せた。

(4) 島の重み
島 S の重み（S の点の重みの和）を $w(S)$ と表す。島 S として 1 点または 2 点からなる部分集合を考えることにより，1 から $2n-1$ までの重みをもつ島の存在がわかる。

指定された値 $m(\geq 2n)$ に近い重みをもつ島 S に関しては，d 次元空間における重み付き点集合に対する結果が得られ，$n(n+1)/4$（点の重みの総和の半分）以下の任意の自然数 m に対して，$|w(S)-m|\leq n/2^{d+1}+\lceil d/2 \rceil$ をみたす島 S が存在することが示された。「すべての点の重みが異なる」という制約を除き，各点の重みを 2^d 以下の自然数に限定し，かつ，重み 2^k（$k=0,1,2,\ldots,d-1$）の点を少なくとも

1 個ずつ含む場合には，$m \le$(重みの総和)/2 をみたす任意の自然数 m に対して，$w(S)=m$ をみたす島 S が存在する。

(5) ほぼ均等な重みをもつ島々

指定された値に近い重みをもち，互いに素である島をできるだけ多く見つける問題に関し，以下の結果が得られた。まず P を平面の重み付き点集合とし，k, m は $k \le n/2$，$m \le n^2/9k - n$ をみたす任意の自然数とする。このとき，k 個の互いに素な島 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ で，$|w(S_i)-m| \le n/6+k/2$ をみたすものが存在する。d 次元空間における重み付き点集合に対しても同様の事実が成り立ち，$k \le n/d(d+1)$，$m \le \{d/4(d+1)^2 k\}n^2 - \{3/(d+1)\}n$ みたす任意の自然数 k, m に対して，k 個の互いに素な島 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ で $|w(S_i)-m| \le n/2(d+1)+dk/4$ をみたすものが存在することが示された（$d=2$ の場合は，前述の事実の方が強い)。

(6) 弧状島の重み

以下では，P の点は平面上の凸の位置にあるものとする。島 S が P の凸包の連続する何個かの頂点からなるとき，S を弧状島とよぶ。(4)に記されたものと同様の事実として，「$n(n+1)/2$ 以下の任意の自然数 m に対して，$|w(S)-m| \le \lfloor (n+1)/4 \rfloor$をみたす弧状島 S が存在する」こと，さらに，この不等式が $n \equiv 2 \pmod 4$ に対して最良であることが示された。次に，1 つの弧状島の重みとして取り得る値の集合を $H_1(P)$，2 個の互いに素な弧状島の重みの和として取り得る値の集合を $H_2(P)$ とし，$\min_{|P|=n} |H_i(P)| = h_i(n)$ $(i=1,2)$ とする。$h_1(n)=\Theta(n^2)$（酒井・Urrutia 他）および $h_2(n)=n(n+1)/2$（すなわち，$H_2(P)$ は $|w(P)|$ 以下のすべての自然数からなる；加納）が予想されており，Fabila-Monroy により，$h_1(n)=\Omega(n^{3/2})$ が示されている。本研究によって，$\lim_{n\to\infty} h_1(n)/n^{3/2} = \infty$ および $h_2(n) \ge n^2/4 - O(n^{3/2})$ が示された。また，$H_1(P)$ と $H_2(P)$ との関係に関する結果も得られており，$H_2(P) = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$（右辺は直和で，各 S_i は連続する整数からなる区間で極大なもの）と表して，$t(P) = \sum_{1\le i\le m} \lfloor |S_i|/(n+1) \rfloor$ とおくと，$|H_1(P)|(t(P)+O(1)) \ge n^2/16$ が成り立つ（ただし，これだけでは $h_1(n)$ や $h_2(n)$ に対する下界は改良できない)。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

1. Javier Cano, Alfredo Garcia, Ferran Hurtado, Toshinori Sakai, Javier Tejel, Jorge Urrutia, Blocking the k-holes of point sets in the plane, Graphs and Combinatorics, 査読有, Vol. 31, Issue 5, 2015, pp.1271-1287, DOI: 10.1007/s00373-014-1488-z

2. Sergey Bereg, Jose-Miguel Diaz-Banez, Ruy Fabila-Monroy, Pablo Perez-Lantero, Adriana Ramirez-Vigueras, Toshinori Sakai, Jorge Urrutia, Inmaculada Ventura, On balanced 4-holes in bichromatic point sets, Computational Geometry: Theory and Applications, 査読有, Vol. 48, Issue 3, 2015, pp. 169-179, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772114001047

3. Toshinori Sakai, Jorge Urrutia, On the heaviest increasing or decreasing subsequence of a permutation, and paths and matchings on weighted point sets, Computational Geometry, 査読有, LNCS 7579, 2012, pp. 175-184 http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-34191-5_17

〔学会発表〕（計　８件）

1. Toshinori Sakai, Some results on weighted point sets: weights of islands and lengths of non-crossing monotonic paths, XXXI Coloquio Victor Neumann-Lara de Teoria de las Graficas, Combinatoria y sus Aplicaciones, 2016 年 2 月 29 日，グアナフアト（メキシコ）

2. Toshinori Sakai, On weights of islands of weighted point sets, JCDCG[2] 2015 (The 18th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs), 2015 年 9 月 15 日，京都大学（京都府京都市）

3. Toshinori Sakai, Non-crossing monotonic paths in labeled point sets on the plane, EuroCG 2015 (The European Workshop on Computational Geometry), 2015 年 3 月 17 日，リュブリャナ（スロベニア）

4. Toshinori Sakai, Long monotonic paths in weighted point sets, JCDCG[2] 2014 (The 17th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs), 2014 年 9 月 15 日，東京理科大学（東京都）

5. Toshinori Sakai, Long monotonic paths and polygons in weighted point sets, JCDCG[2] 2013 (The 16th Japan Conference

on Discrete and Computational Geometry and Graphs), 2013年9月18日, 東京理科大学（東京都）

6. Toshinori Sakai, Problems for sets of weighted points in the plane, TJJCCGG 2012 (Thai-Japan Joint Conference on Computational Geometry and Graphs 2012), 2012年12月6日, バンコク（タイ）,

〔図書〕（計　0件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0件）

○取得状況（計　0件）

〔その他〕
ホームページ等　なし

6．研究組織
(1)研究代表者
酒井　利訓（SAKAI, Toshinori）
東海大学・高輪教養教育センター・教授
研究者番号：20267842

(2)研究分担者

(3)連携研究者

研究協力者（海外共同研究者）
URRUTIA, Jorge
メキシコ国立自治大学・数学研究所・専任上級研究員レベルC

HURTADO, Ferran
カタルーニャ工科大学（スペイン）・応用数学科II・教授（平成26年10月まで）