

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：32702

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540147

研究課題名(和文) 単調正規空間をファクターにもつ積空間の定常集合による集合論的考察

研究課題名(英文) The set-theoretic study for the products with a monotonical normal factor in terms of stationary sets

研究代表者

矢島 幸信 (Yajima, Yukinobu)

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号：10142548

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：単調正規空間と色々な空間による積空間の正規性と被覆性の研究は、家本氏と平田氏との共同研究で大きく発展した。それは42ページの長編論文として2014年に出版された。最近10年間の研究をまとめた「Recent Progress in General Topology, III」(2014年出版、全903ページ)ではSzeptyckiと共著で「位相空間の被覆性」に関する研究概説が掲載された。平田氏の協力のもと単調正規空間における対角線の分離性に関する未解決問題のいくつかを肯定的に解決できた。単調正規空間とコンパクト空間による積空間においては、その正規性と対角線の分離性が同値であることも証明した。

研究成果の概要(英文)：The study of the products of monotonically normal spaces and various spaces were widely developed by Kemoto, Hirata and me. It was published as a long paper of 42 pages in 2014. The book titled "Recent Progress in General Topology III", which surveyed the investigations in this 10 years, was published in 2014. The survey titled "Covering properties" with Szeptycki was inserted in the book. Under the cooperation with Hirata, we have affirmatively solved some open problems for separation of diagonal in monotonically normal spaces. Moreover, we have proved the equivalence between normality and separation of diagonal for the products of a monotoncially normal space and a compact space.

研究分野：集合論的位相幾何学

キーワード：コンパクト空間 単調正規空間 積空間 定常集合 正規性 被覆性

## 1. 研究開始当初の背景

1993年に代表者と家本宣幸氏との共著論文で、「パラコンパクト空間  $X$  と非可算濃度空間との積空間  $X \times$  において、オーソコンパクト性から正規性が従う」という研究結果を発表した。それまでは、通常の積空間においては正規性がオーソコンパクト性より強い(またはせいぜい同値)と信じられていた。それだけにこの逆の結果は全く意外であり、1991年のプラハの国際会議で発表したときは皆を驚かせた。

その一方で、その頃の世界の研究の注目は当時の指導的存在だった Rudin の研究している単調正規空間に集まっていた。そして1992年に Balogh-Rudin の強力な定理が発表された。それ以来、単調正規空間は2000年代まで約20年間にわたり積極的に研究され多くの論文が発表された。一時はどの国際会議でも単調正規空間に関する発表が見られたくらいである。

さて、コンパクト空間は数学者ならば分野を問わず誰でも知っている基本的概念である。代表者は単調正規空間  $X$  とコンパクト空間  $K$  を組み合わせた積空間  $X \times K$  で面白い結果を出せれば、その後大きな研究材料を見込めると考えた。最初に述べた積空間  $X \times$  は非可算濃度空間が非常に特殊な空間だけに、その関係の意外性だけが目立った。この関係が単調正規空間  $X$  とコンパクト空間  $K$  の積空間  $X \times K$  に対しても同様に成り立つならば、最初の現象は決して特殊な状況だけでの性質でないことを意味する。すなわち、一般的な積空間でも特殊な関係が成り立つことは、それは特殊ではなくある種の普遍性をもつことになる。しかもそれは誰も気付いていないわけだから、大いに研究の価値があると考えるのは当然であろう。

この考えから、単調正規空間  $X$  とコンパクト空間  $K$  による積空間  $X \times K$  の正規性からオーソコンパクト性を演繹できることを証明した。しかもその積空間  $X \times K$  の正規性の特徴付けを得て、それを応用する形で示した。この論文は2011年に出版された。その証明には上記の Balogh-Rudin の定理が大きな役割を担った。この結果はこの積空間  $X \times K$  が一般的なもののだけに、きわめて予想外の結果であった。

研究開始の背景が自分自身の結果であることを主張するのは面映いだが、それだけに誰も手を付けていない研究課題であることは間違いない。しかし、上記の特徴づけの結果について残念だったことは、その証明がある意味自然で複雑でないことであった。しかし、大きく発展していく研究の最初の一步は往々にして簡単な結果であることを、代表者は経験上知っていたので左程落胆することはなかった。

## 2. 研究の目的

研究目的は上記の研究をさらに発展させ

ていくことである。それには大きく分けて次の方向が考えられる。

(1) 単調正規空間  $X$  とコンパクト空間  $K$  のなす積空間  $X \times K$  に対して、その正規性は特徴付けられた。それではこの積空間について、オーソコンパクトという被覆性について、同じ形の特徴付けが成り立つかを考える。それによって、2つの特徴付けを比較しただけでオーソコンパクト性から正規性が従うことが明らかになるようにする。

(2) コンパクト空間  $K$  をもっと一般的な空間  $Y$  で置き換えて、単調正規空間  $X$  との積空間  $X \times Y$  において、その正規性やオーソコンパクト性を論じていく。空間  $Y$  の選び方によって、この研究を色々な方向に大きく発展させることが可能になる。

## 3. 研究の方法

単調正規空間の研究の方法の最も一般的な方法は、上記の背景のところで言及した Balogh-Rudin の定理を使うことである。この定理は、与えられた単調正規空間の開被覆に対して、定常閉集合が都合よく配置できるという内容である。そのためには、位相空間の中の定常閉集合の全体の族を考える必要がある。

代表者は位相空間の正規性や被覆性の研究には長い年月従事してきたが、集合論的方向からの研究アプローチは比較的最近と言える。一方、定常集合は極めて集合論的色彩が強い研究対象である。そこで連携研究者として、大分大学の家本宣幸氏および最近神奈川県に所属した平田康史氏の研究協力を得て研究を進めていくことになった。

代表者は研究の方向や問題の提起に対しては、長い経験からある程度先を読むことができる。しかし、反例を作り出すのが極端に苦手であり、具体的な問題の解決にも勢いはなくなっている。その点で平田氏は代表者より年齢的にも若く実力がある。特に、問題の解決能力ははるかに代表者を凌ぐ。また彼は集合論の専門家でもあるので、全く別の観点から問題の解決策を見出し得る。いずれにしても、彼の研究に対する推進力には大いに期待できる。

## 4. 研究成果

(1) 位相ゲームで定義された空間：

$X$  を単調正規空間とする。次に、コンパクト空間  $K$  を位相ゲームにより定義される DC-like 空間  $Y$  で置き換えた。それによって、コンパクト空間よりはるかに広いクラスの空間に結果を拡張できる。実際、その積空間  $X \times Y$  のオーソコンパクト性から正規性のみならず長方形性も従うことを示した。また、この積空間  $X \times Y$  の長方形性の仮定の下で、通常は正規性より強い条件である族正規性や可縮性などが正規性と同値であることも示された。この結果は2012年に論文として *Topology and its Applications* に発表された。

この論文によって、最初の単調空間とコンパクト空間による積空間の結果が、今後さらに大きく発展していくことを予感させた。

#### (2) いろいろな特殊な空間：

$X$  を単調正規空間とする。次に、コンパクト空間  $K$  との積空間  $X \times K$  の正規性の特徴付けについて、別の同値の概念を創出して最初に与えたものよりも広範に応用できるような形にできた。さらに単調正規空間  $X$  と DC-like 空間  $Y$  との積空間  $X \times Y$  の正規性についても、この場合と同様の特徴付けができることが分かった。ただし、この場合は正規性だけでは不十分で、「正規かつ長方形的」という組み合わせが必要になる。

次に積空間の正規性の代わりにオーソコンパクト性に関しての特徴付けを考えた。最初に述べたように、家本氏との 1993 年の共著論文で積空間  $X \times Y$  のオーソコンパクト性の特徴付けしたが、そこで orthocaliber という概念を導入した。この orthocaliber の概念を使って、単調正規空間  $X$  とコンパクト空間  $K$  との積空間  $X \times K$  のオーソコンパクト性の特徴付けることができた。当然、この結果がコンパクト空間  $K$  の代わりに DC-like 空間  $Y$  を置き換えて成り立つかも議論して、その結果同様に成り立つことを示した。

上で DC-like 空間  $Y$  を考えたときには、正規性だけでなく長方形性が必要であることを述べた。いま空間  $Y$  として 1 点を除いて孤立点からなる空間 (almost discrete 空間と名付けた) を考える。これはある意味では特殊で単純な空間に思えるが、積空間にすると予想以上に複雑な構造を持つてくる。単調正規空間に限らずどんな空間  $X$  とコンパクト空間  $K$  との積空間  $X \times K$  は常に長方形的であるから、長方形的で正規でない積空間は数多くある。ところが、ここでは「単調正規空間  $X$  と almost discrete 空間  $D$  との積空間  $X \times D$  においては、それが長方形的ならば正規となる」という意外な事実が証明された。

その他にもコンパクト空間  $K$  の代わりに順序数の部分空間  $A$  または GO-空間 (一般順序位相空間)  $G$  を考えて、それぞれ興味ある結果を得ることが出来た。それについての言及はさらに長くなるので割愛する。

これらの結果は 8 つのセクションに分類されて、平田康史氏、家本宣幸氏との共著で 2014 年に 42 ページの論文にまとめて Topology and its Applications に発表された。この長い論文をもって当初の研究目的はほぼ達成されたと言える。この論文の閲覧履歴がかなり高いことを出版社 Elsevier からの連絡で知った。

#### (3) 新しい濃度関数：

代表者は積空間の正規性と被覆性の研究では、かなりの業績を重ねてきたと自負できる。そこで、積空間が全く出てこない、かつ自分の論文を参考文献に挙げないような論

文を一つぐらいは書いてみたいと思い始めた。実際、そのような論文は大学院時代の論文を除いて書いた記憶があまりない。

代表者は一般距離空間による積空間の正規性については、20 年以上研究してきた。そこで、積空間のことは取り敢えず忘れて、単に一般距離空間論の中で何か他の研究対象と結びつけられないかと考えた。そこで思いついたのは、 $\text{sup}=\text{max}$  問題である。この問題自体は 1960 年代から研究されてきた極めてクラシカルな研究課題である。昔から論じられてきた spread という濃度関数のかわりに、それに定義が似ている extent という別の関数を用いることにした。そのために新しい濃度関数 Lindelof degree を補助的に導入して、extent に対して  $\text{sup}=\text{max}$  がどのような一般距離空間について成り立つかを議論した。主な一般距離空間に対しては、ほぼ議論できたと言える。平田康史氏は非可算濃度の部分空間の中で、extent についていろいろと面白い反例を構成してくれた。

チェコの雑誌 Comment. Math. Univ. Carolin. で E. Cech 生誕 120 年の特別号を 2013 年に出すとのことで、そこに論文の投稿依頼があった。そこに投稿し出版された。なお、この論文には未解決問題をいくつか提起したが、その一つを平田康史氏は部分的に解決した。それは同じ雑誌の 2015 年に彼の単著論文として発表されている。

#### (4) 対角線の分離性：

実は 2014 年発表の上記の論文では単に当初の目的を達成したという事実だけにとどまらなかった。この長い論文によって、単調正規空間に関する研究では我々の研究グループはトップを走っているという実感があった。実際、単調正規空間に関する様々な証明テクニックをここで開発している。これらのテクニックに価値をもたせるには、それを応用して未解決問題を解くことが最も説得力のある方法である。

位相空間の正規性とは、そこにおける 2 つの交わらない閉集合が開集合によって分離できるという性質である。これを積空間上で考えて、一方の閉集合を対角線とみなす分離性はかなり昔 (最初は 1950 年代) から研究されていた。それをまとめた Buzuyakova の研究論文が 2010 年に 2 つ発表され、そこには単調正規空間の対角線分離に関する未解決問題がいくつか提起されていた。

そして、これらの主な問題は我々のテクニックを駆使することによって肯定的に解決できた。ここでは単調正規空間に関して頻りに利用される Balogh-Rudin の定理だけでは不十分で、単調正規の定義に戻って考えるなど、新たに適用できそうなテクニックを開発している。また、Buzuyakova の論文における反例が誤っていることも指摘できた。最後には、これまで研究してきた単調正規空間  $X$  とコンパクト空間  $K$  の積空間  $X \times K$  においては、

その正規性といくつかの対角線の分離性とがすべて同値になるという予想外のきれいな結果まで証明できてしまった。

これらの結果をまとめた論文は9つのセクションからなり、これもかなり長い論文となった。近々Topology and its Applicationsから平田康史氏との共著論文として発表予定である。これの続編と言える論文が平田康史氏の単著で、2015年に同雑誌上で先に出版されている。

#### (5) 積空間のD-空間性：

2012年からの代表者の研究は、平田康史氏という研究パートナーを得て、研究活動40年の中で最も実り多き時を迎えた。偶々、アメリカ滞在1年間に世話になったオーバン大学のGruenhagen教授編集の故Rudin教授追悼集がTopology and its Applicationsの特別号として出版されるとの連絡があった。さらに、その特別号に論文を投稿してほしいとの依頼もあった。そこで、現在最も注目されているD-空間の研究に着手した。D-空間の研究論文は多く、著名な研究者が数多く研究に参加している最も競争の激しい研究課題である。幸いにも、GruenhagenのD-空間に関するまとめが2011年に出版されていたので、D-空間研究全体を手短に把握するには便利であった。

しかし、D-空間 $X$ 、 $Y$ の積空間 $X \times Y$ についてD-空間性は保存されないことが分かっていた。しかも、かなり強い条件を空間 $X$ 、 $Y$ に入れても成り立たない。ところが、可算積空間 $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ に関しては、唯一の肯定的結果が2008年にPengにより証明されていた。ここでの証明方法と代表者が30年前に使ったテクニックを結び付けて、Pengの結果をさらに一般化することができた。しかし、これだけでは一般化に止まってしまうので、この結果は非可算積空間を含む形にまで発展させたい。そのためには自然数の非可算積のD-空間性を調べる必要があった。その結果、自然数の非可算積はD-空間にならないことが分かった。これにより非可算積空間にまで拡張されたD-空間に関する結果が得られた。

D-空間の2つの積空間に関する結果はあまり芳しい結果は得られていない。しかし、ここでは簡単な命題の形で肯定的結果を述べている。上記の非可算積の場合を含めて、一般パラコンパクト空間において、積空間のD-空間性を議論していく必要性を、最後に問題の形で提起している。これによって、D-空間研究の新たな方向を提案できたと思う。

この論文は先に述べた故Rudin教授追悼の特別号に平田康史氏との共著論文として掲載が予定されている。

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima, "On the D-property of certain products", Topology and Appl. (M. E. Rudin 追悼特別号) 執筆依頼, 査読有, 掲載予定。

Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima, "Separation of diagonal in monotonically normal spaces and their products", Topology and Appl. 査読有, 掲載予定。

Yasushi Hirata, "Orthocompactness implies  $\beta$ -paracompactness for the product of a  $\beta$ -paracompact normal space and a compact spaces", Topology and Appl. 査読有, **185/186** (2015), 124-133.

Yasushi Hirata, "The sup=max problem for the extent of the Lindelof degree of generalized metric spaces II", Comment. Math. Univ. Carolin. 査読有, **56** (2015), 89-93.

Yasushi Hirata and Nobuyuki Kemoto, "Countable metacompactness of products of LOTS", Topology and Appl. 査読有, **178** (2014), 1-16.

Yasushi Hirata, Nobuyuki Kemoto and Yukinobu Yajima, "Products of monotonically normal spaces with various special factors", Topology and Appl. 査読有, **164** (2014), 46-82.

Nobuyuki Kemoto, "The lexicographic ordered products and the usual Tychonoff products", Topology and Appl. 査読有, **162** (2014), 20-33.

Nobuyuki Kemoto and Y. F. Ortiz-Castillo, R. Rojas-Hernandez, "On C-embeddedness of hyperspaces", Topology and Appl. 査読有, **162** (2014), 34-42.

Yasushi Hirata and Yukinobu Yajima, "The sup=max problem for the extent of generalized metric spaces", Comment. Math. Univ. Carolin. (E. Cech 生誕120年記念号) 執筆依頼, 査読有, **54** (2013), 245-257.

Yasushi Hirata and Nobuyuki Kemoto, "Orthocompactness versus normality in hyperspaces", Topology and Appl. 査読有, **159** (2012), 1169-1178.

Yukinobu Yajima, "Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games", Topology and Appl. 査読有, **159** (2012), 1223-1235.

[学会発表](計12件)

Yukinobu Yajima, "Separation of diagonal and the D-property in products", Symposium on General Topology (招待講演), March 14 2015,

南 14 京大学 (南京市, 中国) .  
平田康史, 矢島幸信, 「On the D-property of certain products」, RIMS 研究「集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野の交流」, 2014 年 10 月 24 日, 京都大学数理解析研究所。  
平田康史, 「Between orthocompactness and  $\omega$ -paracompactness」, RIMS 研究「集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野の交流」, 2014 年 10 月 22 日, 京都大学数理解析研究所。  
家本宣幸, 「自書式順序積と普通のチョコノフ積」, RIMS 研究「集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野の交流」, 2014 年 10 月 23 日, 京都大学数理解析研究所。  
平田康史, 矢島幸信, 「無限積空間における D-空間性」, 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学。  
平田康史, 「順序数, LOTS, 単調正規空間とその積の位相的性質の比較」, 日本数学会春季総合分科会 (特別講演), 2014 年 3 月 16 日, 学習院大学。  
平田康史, 「point-countable base をもつ空間における extent の  $\sup = \max$  問題」, RIMS 研究集会「集合論的及び幾何学的トポロジーの現状とその展望」, 2013 年 10 月 16 日, 京都大学数理解析研究所。  
Yukinobu Yajima, “Diagonal separation in monotone normality and products”, International Conference on Topology and Geometry 2013 (Joint with the 6<sup>th</sup> Japan Mexico Topology Symposium), (招待講演) September 6 2013, 島根大学 (松江市, 日本) .  
Yukinobu Yajima, “Products of monotonically normal spaces with various special factors”, (招待講演) September 26 2012, 南京大学 (南京市, 中国) .  
Yukinobu Yajima, “Products of a monotonically normal space with a compact space”, International Conference on Topology and the related fields, September 23 2012, 南京師範大学 (南京市, 中国) .  
平田康史, 家本宣幸, 「Countable metacompactness of products of LOTS」, RIMS 研究集会「一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーの現状と諸問題」, 2012 年 9 月 28 日, 京都大学数理解析研究所。  
家本宣幸, 「monotonic normal 空間と種々の位相空間との積の位相的性質について」第 59 回トポロジーシンポジウム, 2012 年 8 月 11 日, 佐賀大学。

〔図書〕(計 1 件)

Paul Szeptycki and Yukinobu Yajima, “Covering properties”, Recent Progress in General Topology III (K. P. Hart, J. van Mill and P. Simon edited), 執筆依頼, 査

読有, Atlantis Press, 801-824 (2014).

〔その他〕  
ホームページ等  
なし

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

矢島 幸信 (YAJIMA YUKINOBU)  
神奈川大学・工学部・教授  
研究者番号: 10142548

##### (2) 研究分担者

なし

##### (3) 連携研究者

家本 宣幸 (KEMOTO NOBUYUKI)  
大分大学・教育福祉科学部・教授  
研究者番号: 70161825

平田 康史 (HIRATA YASUSHI)  
神奈川大学・工学部・特任准教授  
研究者番号: 70375400