

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 23 日現在

機関番号：57301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540151

研究課題名(和文)非線形発展方程式の解に対する精度保証付き数値計算法

研究課題名(英文) Numerical verification method of solutions for nonlinear evolutionary equations

研究代表者

中尾 充宏 (NAKAO, Mitsuhiro)

佐世保工業高等専門学校・その他部局等・その他

研究者番号：10136418

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：非線形発展方程式の解に対する数値的検証法の定式化を行い検証の実例を与えた。線形熱方程式の初期値境界値問題において、空間方向半離散化後の線形常微分方程式系に対して、基本解行列を用いて時間方向近似解を与える新しい全離散有限要素スキームを提案し、その構成的a priori誤差評価定数を算定した。それを用いて非線形放物型問題に関する線形化逆作用素の構成的ノルム評価法を与え、Newton的検証法を定式化し、プロトタイプな検証例を得た。このほか、線形楕円型作用素の逆作用素ノルムの数値的評価手法の改良を行い、また楕円型作用素に関する固有値の除外(excluding)手法を一般化して定式化した。

研究成果の概要(英文)：We studied the numerical verification of solutions for nonlinear evolutionary problems with some numerical examples. We considered the constructive a priori error estimates for a full discrete numerical solution of the heat equation, which is based on the finite element Galerkin method with an interpolation in time that uses the fundamental solution for semidiscretization in space. We also considered the guaranteed a posteriori estimates for the inverse parabolic operators and derived a numerical verification method of exact solutions for the nonlinear parabolic equations by Newton's method with some prototype numerical examples. Furthermore, we presented some refinements on the verified computations for linearized inverse operators of elliptic operators as well as the eigenvalue excluding techniques for them.

研究分野：計算数学

キーワード：精度保証付き数値計算法 解の数値的検証 解の事後誤差評価 非線形発展方程式 計算機援用証明

1. 研究開始当初の背景

近年の計算機技術のめざましい発展と相まって、応用解析学や計算理工学に現れる複雑な非線形問題の中で、理論解析が困難な問題に対する数値計算による証明法(計算機援用証明)は、その意義が次第に高まりつつある。また、このような証明法は、問題の解が数値的に精度保証付きで求められるという副産物も得られるため、数値シミュレーションの品質保証など種々の計算理工学上の目的にも活用できる可能性がある。研究代表者(中尾)は、早い時期(1980年代)からその重要性に着目し、主として楕円型偏微分方程式に対する解の存在を計算機により立証する、という研究姿勢のもとに、この分野において常に世界に先駆けた研究業績を蓄積してきた。しかしながら、発展方程式に関してはその重要性にも関わらず、最近に至るも未だ実用的なレベルでの研究は、ほとんど手つかずの状況が続いていた。

2. 研究の目的

精度保証付き数値計算法(以下、「数値的検証法」と同義)とは、問題に対する解の存在と誤差限界を数学的に保証するような数値計算法のことである。本研究では、研究代表者がこれまでに開発してきた楕円型方程式に対する精度保証付き数値計算の原理を、発展方程式にまで拡張することを目的としている。放物型方程式の初期境界値問題に対する一般的な解の検証原理を確立し、反応拡散方程式をはじめとする実際の非線形問題の解に対する精度保証に適用し、その有効性を実証することを目指す。具体的には以下の到達目標を掲げる。

- (1) 非線形放物型方程式の解の数値的検証(精度保証)において本質的な役割を果たす、簡単な線形放物型方程式の近似解(放物型射影)に対する構成的 a priori 誤差評価方式を確立する。
- (2) 非線形発展方程式の解の検証では、その線形化逆作用素のノルム評価が重要である。したがって、適切な関数空間の設定のもとに、一般の線形放物型方程式の解に対する a priori 評価法を開発し、実際の方程式に適用する。
- (3) 上記2つの手法に基づき、非線形放物型方程式の初期境界値問題の解の精度保証を定式化し、実際問題への適用を図る。
- (4) 反応拡散方程式などの具体的非線形現象のモデル方程式に対して、これらの解の精度保証付き包み込み(enclosing)を実現し、その有効性を実証する。
- (5) これまでに得られている楕円型偏微分方程式に対する解の数値的検証方式について、その拡張と改良を図る

とともに、その結果を発展方程式の数値的検証法に反映させる。

3. 研究の方法

研究代表者は、これまで主として楕円型方程式の解の精度保証付き数値計算について、世界的レベルで多くの成果を蓄積してきた。

本研究ではそれらの研究成果を、放物型方程式を中心とした非線形発展方程式にまで拡張することを目指す。先ず先行研究において得られた解の検証原理を放物型に拡張し、その結果を実際の時間依存型方程式に対し適用し、その有効性を実証する。次に、より広い発展方程式を対象として検証原理の拡張・改良を行い、その実装によって精度保証方式の評価とさらなる改良に努める。

これらの検討は、代表者が数値的検証法の基礎理論の検討と研究全体を総括し、これまでも理論と数値計算の両面において、代表者を強力に支援してきた木村拓馬(早稲田大学・理工学術院・次席研究員)が研究分担者として参加し、理論的検討結果に基づく数値計算の実装を行う。また、連携研究者として豊富な検証理論と実装両面のの実績を持つ渡部善隆(九州大学・情報基盤研究開発センター・准教授)および木下武彦(京都大学・数理解析研究所・研究員)の両氏が参加する。さらに、海外共同研究者としてドイツKarlsruhe大学のM. Plum教授にも研究協力を依頼する。同教授は、偏微分方程式の解に対する数値的検証に関し多くの実績をもつ優れた研究者である。同氏との間では既に、流体問題から生じた非自己共役型固有値問題、および本質的スペクトルをもつ微分作用素の固有値問題に関して共同研究の実績もあり、一層緊密な情報交換・共同研究を行う。

また、国内外のシンポジウムへの参加発表を通じて研究成果のタイムリーな広報を行う。さらに研究成果はすべて査読付き英文論文誌に投稿し成果を内外に周知する。

4. 研究成果

研究代表者、研究分担者、連携研究者および海外共同研究者が研究目的にしたがって恒常的に検討を進め、以下の成果が得られた。これらの成果は、非線形発展方程式の解に対する数値的検証法を含め、精度保証付き数値計算法の研究進展に対して大きく貢献するものである。

- (1) 熱方程式の初期値境界値問題に対し、空間方向半離散化後の線形常微分方程式系に対して、基本解行列を用いて、時間方向全離散近似解を与える新しい有限要素スキームを提案し、その構成的 a priori 誤差評価定数を算定した。
- (2) 非線形放物型問題に関する線形化逆作用素のノルム評価について検討し、(1)の成果を援用して構成的 a priori 評価法を与えた。さらにその効率化についても検討した。

- (3) 放物型方程式の時間周期解の数値的検証に向けてその定式化を検討し、熱方程式の半離散化常微分方程式系に対する基本解行列を用いた、構成的表現法を見出した。
- (4) 非線形楕円型問題に対する線形化逆作用素のノルム評価について検討し、ある種の問題に対しては、従来の手法を大幅に改善できることを明らかにした。
- (5) 研究代表者らが楕円型作用素に対して開発した固有値の除外(excluding)手法を一般化して Hilbert 空間において定式化し、それを用いた効率良い逆作用素のノルム計算法を与えた。実際の楕円型問題に対して適用し、それが従来の方式に較べて格段に効率良いものであることを実証した。
- (6) 非線形発展方程式の高精度検証に向けて、熱方程式の全離散解に対する構成的誤差評価の改良を行った。
- (7) 2 階楕円型作用素の Laplacian ノルムの効率的評価法を得た。これは、従来の理論的 a priori 評価では得られない、作用素に含まれる係数関数の特性を活かした a posteriori 評価を与えるものである。
- (8) 線形楕円型作用素の逆作用素ノルム評価の比較とその利害得失を明らかにした。作用素の特性によってその評価効率に有意な差があることが明らかとなった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 11 件)

- [1] T. Kinoshita, Y. Watanabe, M. T. Nakao, Recurrence relations of orthogonal polynomials in \mathcal{H}_0^1 and \mathcal{H}_0^2 , to appear in *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE (2015). 査読有
- [2] M. T. Nakao, Y. Watanabe, T. Kinoshita, T. Kimura, N. Yamamoto, Some considerations of the invertibility verifications for linear elliptic operators, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* 32 (2015), 19-31. DOI:10.1007/s13160-014-0160-6. 査読有
- [3] M.T. Nakao, On verified computations of solutions for nonlinear parabolic problems, *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE Vol. 5 No. 3 (2014), 320-338. DOI:10.1587/nolta.5.320 査読有
- [4] Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, M. T. Nakao, Verified computations of eigenvalue enclosures for eigenvalue problems in Hilbert spaces, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 52 (2014), 975-992. DOI:10.1137/120894683 査読有
- [5] T. Kinoshita, T. Kimura, M. T. Nakao, On the a posteriori estimates for inverse operators of linear parabolic equations with applications to the numerical enclosure of solutions for nonlinear problems, *Numerische Mathematik*, 126 (2014), 679-701. open access, DOI 10.1007/s00211-013-0575-z. 査読有
- [6] T. Kinoshita, Y. Watanabe, M. T. Nakao, An improvement of the theorem of a posteriori estimates for inverse elliptic operators, *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE Vol. 5 No. 1 (2014), 47-52. DOI:10.1587/nolta.5.47 査読有
- [7] M. T. Nakao, T. Kimura, T. Kinoshita, Constructive a priori error estimates for a full discrete approximation of the heat equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51 (2013), 1525-1541. DOI:10.1137/120875661 査読有
- [8] Y. Watanabe, T. Kinoshita, M.T. Nakao, A posteriori estimates of inverse operators for boundary value problems in linear elliptic partial differential equations, *Mathematics of Computation*, 82 (2013), 1543-1557. DOI:10.1090/S0025-5718-2013-02676-2 査読有
- [9] T. Kimura, T. Kinoshita, M.T. Nakao, Some remarks on the instability of approximate solutions for ODEs, *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE Vol. 4 No. 1 (2013), 80-87. DOI:10.1588/nolta.4.80 査読有
- [10] K. Nagatou, M. Plum, M. T. Nakao, Eigenvalue excluding for perturbed-periodic one-dimensional Schroedinger operators, *Proceedings of the Royal Society London Series A Math. Phys. Eng. Sci.* 468 (2012), 545-562. doi:10.1098/rspa.2011.0159. 査読有
- [11] M. T. Nakao, T. Kinoshita, T. Kimura, On a posteriori estimates of inverse operators for linear parabolic initial-boundary value problems, *Computing* 94 (2012), 151-162. DOI 10.1007/s00607-011-0180-x 査読有

[学会発表](計 27 件)

- (1) 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏, 線形楕円型作用素に対する Laplacian ノルムの構成的評価、日本数学会年会、明治大学駿河台キャンパス、2015 年 3 月 24 日
- (2) 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏, 楕円型線形逆作用素評価の収束性について 日本応用数理学会、2015 年 研究部会連合発

表会、明治大学中野キャンパス、2015年3月7日

(3) Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, Mitsuhiro T. Nakao, Some remarks on the rigorous estimation of inverse linear elliptic operators, 16th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics(SCAN 2014), University of Wuerzburg, Germany, September 23, 2014.

(4) 木下武彦, 木村拓馬, 中尾充宏, PDEの周期解の精度保証の現状について、第1回山梨精度保証研究会、山梨県甲州市勝沼「ぶどうの丘」、2014年9月16日。

(5) 渡部善隆, 木下武彦, 中尾充宏, 2階楕円型作用素における構成的 Laplacian ノルム評価、2014年度日本応用数学会年会、政策研究大学院大学、2014年9月3日。

(6) 渡部善隆, 木下武彦, 中尾充宏, 線形作用素に対する可逆性の検証と精度保証付きノルム評価の改良について、2014年日本数学会年会、学習院大学、2014年3月18日

(7) Mitsuhiro T. Nakao, Numerical verification method of solutions for nonlinear elliptic and evolutionary problems, INVA 2014: The International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2014, Waseda University, Tokyo, March 16, 2014.

(8) 渡部善隆, 木下武彦, 木村拓馬, 山本野人, 中尾充宏, 2階楕円型線形作用素の可逆性検証に関するいくつかの考察、応用数学合同研究集会、龍谷大学理工学部、2013年12月20日

(9) 中尾充宏, Numerical verification method of solutions for nonlinear elliptic and parabolic problems, RIMS 研究集会「非圧縮性粘性流体の数理解析」、京都大学数理解析研究所、2013年11月27日

(10) 渡部善隆, 中尾充宏, 無限次元非線形関数方程式に対する Newton 反復型計算機援用証明、日本数学会秋季総合分科会、愛媛大学、2013年9月27日

(11) 渡部善隆, 藤原宏志, 中尾充宏, exflibによる平行 Poiseuille 流れの不安定性解析の高精度化、日本応用数学会年会、アクロス福岡、2013年9月9日

(12) 木下武彦, 渡部善隆, 中尾充宏, 楕円型偏微分作用素に対する逆作用素評価の効率化、日本応用数学会年会、アクロス福岡、2013年9月10日

(13) 中尾充宏, 「精度保証」---その過去から未来へ---、精度保証付き数値計算ワークショップ、アクロス福岡、2013年9月10日

(14) Takehiko Kinoshita, Mitsuhiro T. Nakao, Some remarks on the optimal L2 error estimates for the finite element method on the L-shaped domain, 10th International

Conference on Information Technology : New Generations(ITNG 2013), Las Vegas, USA, April 15, 2013.

(15) 木下武彦, 渡部善隆, 中尾充宏, 楕円型偏微分作用素の可逆性の検証について、日本数学会年会、京都大学、2013年3月22日

(16) 中尾充宏, 偏微分方程式の解に対する数値的検証の現状と動向、東京大学数理学研究科談話会、東京大学駒場キャンパス、2013年1月25日

(17) 木村拓馬, 木下武彦, 中尾充宏, 放物型問題の解の検証における計算上の注意、2013年ハイパフォーマンスコンピューティングと計算科学シンポジウム(HPCS2013)、東京工業大学蔵前会館、2013年1月15-16日

(18) 中尾充宏, 流体の方程式に対する精度保証付き数値計算、早稲田大学流体数学セミナー、早稲田大学西早稲田キャンパス、2012年10月5日

(19) 渡部善隆, 中尾充宏, 線形作用素に対する可逆性の検証と精度保証付きノルム評価、日本数学会秋期総合分科会、九州大学伊都キャンパス、2012年9月21日

(20) 木下武彦, 木村拓馬, 中尾充宏, 線形化逆作用素を用いた非線形常微分方程式系の初期値問題に対する解の検証方法、日本数学会秋期総合分科会、九州大学伊都キャンパス、2012年9月21日

(21) 中尾充宏, 偏微分方程式の解に対する数値的存在検証---コンピュータによる厳密な解析学の展開---、日本数学会秋期総合分科会総合講演、九州大学伊都キャンパス、2012年9月19日

(22) M. T. Nakao, T. Kimura, T. Kinoshita, On guaranteed a posteriori error estimates for numerical solutions of nonlinear parabolic problems, 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering(ECCOMAS 2012), Wien, Austria, September 12, 2012.

(23) 中尾充宏, 放物型問題の周期解の数値的検証について(問題提起)、環瀬戸内ワークショップ、福岡県福岡市アクロス福岡、2012年9月8日

(24) 木下武彦, 木村拓馬, 中尾充宏, 線形化逆作用素を用いた非線形常微分方程式系に対する解の検証方法について、日本応用数学会年会、稚内全日空ホテル、2012年8月31日

(25) 渡部善隆, 中尾充宏, 無限次元線形作用素に対する精度保証付きノルム評価、日本応用数学会年会、稚内全日空ホテル、2012年8月31日

(26) Takehiko Kinoshita, Mitsuhiro T. Nakao, Some remarks on the optimal L2 error estimates for the finite element method with nonconvex polygonal domain, The 8th East Asia SIAM Conference (EASIAM 2012),

National Taiwan University, Taipei,
Taiwan. June 27, 2012

(27) 渡部善隆、長藤かおり、Michael Plum、
中尾充宏、無限次元作用素に対する固有値の
除外理論と精度保証付き数値計算、九州大学
数値解析セミナー(Q-NA)、九州大学伊都キ
ャンパス、2012年4月24日

〔その他〕

ホームページ等

[http://www.sasebo.ac.jp/research/system
/master/mtnakao.pdf](http://www.sasebo.ac.jp/research/system/master/mtnakao.pdf)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中尾 充宏 (NAKAO, Mitsuhiro)

佐世保工業高等専門学校・校長

研究者番号：1 0 1 3 6 4 1 8

(2) 研究分担者

木村 拓馬 (KIMURA, Takuma)

早稲田大学・理工学術院・次席研究員

研究者番号：6 0 5 8 1 6 1 8

(3) 連携研究者

渡部 善隆 (WATANABE, Yoshitaka)

九州大学・情報基盤研究開発センター・

准教授

研究者番号：9 0 2 4 3 9 7 2

木下 武彦 (KINOSHITA, Takehiko)

京都大学・数理解析研究所・研究員

研究者番号：3 0 5 4 6 4 2 9

(4) 研究協力者

Michael Plum

Karlsruhe 大学(ドイツ)・教授