

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540157

研究課題名(和文)古典的不等式の精密化とその楕円型変分問題への応用

研究課題名(英文)Refinement of classical inequalities and its application to elliptic variational problems

研究代表者

堀内 利郎(Horiuchi, Toshio)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：80157057

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式の最良定数を実現する解の存在、最良定数のパラメータに関する連続性、対称性の崩れ等が組織的に解明された。p=1に場合のCaffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式の等周不等式を用いる証明、対称性の崩れの実証が行われた。(2) 対数の無限積を基礎とする超対数が導入され、重み付きハーディの不等式は可算無限個のmissing termをもつことが示された。(3) 非常に大きい増大度の非線形項を持つ楕円型方程式を考察するため超対数を特徴づける微分方程式の研究がなされた。

研究成果の概要(英文)：(1) Existence of the solutions for the best constants of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities, continuity with respect to parameters of the best constant, symmetry breaking were studied systematically. For p=1, the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities were established by effective use of isoperimetric inequalities, and symmetry breaking in p=1 was proved. (2) A theory of super logarithm based on logarithmic infinite product was introduced, and existence of infinitely many missing term was shown for the weighted Hardy type inequalities. (3) Differential equations characterizing super logarithm was studied to deal with elliptic equations with nonlinear term of very fast growth order.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：CKN型不等式 ハーディ不等式 ソボレフ不等式 楕円型変分問題 ミッシング・ターム p-ラプリアン 加藤の不等式 強最大値原理

1. 研究開始当初の背景

Hardy 型、Sobolev 型、Rellich 型、及び、それらを複合した Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式等の一連の古典的不等式の改良の可能性とその重要性は古くから認識されてきた。非常に有名なブレイクスルーには、83年に H.R. Brezis、L.Nirenberg が精密化した Sobolev 不等式を用いてクリティカルな増大度をもつ半線形楕円型方程式の正値解の存在を示した仕事、86年の Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式の導入、97年に H.L. Brezis、J.L. Vazques が精密化した Hardy 不等式を用いて半線形楕円型方程式の解の爆発を考察した仕事などがある。その後もこの方面の研究は盛んであり、国内では本研究グループが中心となり研究が意欲的に進められてきた。特に近年、本研究グループにより古典的不等式のミッシング・タームの研究、Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式の研究等が集中的に遂行され多くの成果を得ている。このように本研究は、我々のこれまでの研究の直接の延長線上にあり、以下に述べるように非線形楕円型偏微分作用素の研究の大きな進展が期待できる。

2. 研究の目的

「古典的不等式の精密化とその楕円型変分問題への応用」を中心課題とし、具体的には有機的に関連する次の3つの研究目的を設定している。

(1) Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式 (CKN 型不等式)の精密化と対称性の崩れの研究の遂行: CKN型変分問題($p>1$)は係数や定義領域が対称であるにもかかわらず、重みのベキが十分大きいと対称性が崩れ対称解が存在しないことを、非線形方程式の線形化法を基礎として一般的に証明し、「対称性の崩れ方」を解明したい。その直接の応用として、対称性の崩れがおこるタイプの変分問題の定式化を試みる予定である。さらに $p=1$ 場合は等周不等式となるが、やはり対称性の崩れがおこる事を解明する予定である。一方、重みのベキが小さいときには、重み付き関数再構成と非線形ポテンシャル論を有効に用いて、対称解の存在範囲を中心に精密な結果を出したいと考えている。臨界指数の CKN 型不等式が extremal を持たない事が、特別な場合においては既に解明されている。本研究では、非臨界の場合を含めこの現象をさらに一般的に解明したい。この研究は下記の「古典不等式における missing term の存在の研究」と同時進行で遂行される。極値関数の存在に関して concentration compactness の手法により研究をさらに進め、不明であったソボレフ臨界指数の場合と重み付きレリッヒ型不等式の extremal の存在性を解明する。この問題は、重みが無い場合にも具体的な解の形は不明であり興味深い。

(2) 古典不等式における精密な無限個のミッシング・タームの存在とその応用の研究の遂行: 重み付きハーディの不等式は可算無限個の missing term をもつことが前回までの研究で示されているが、最近の研究で対数の無限積を基礎とする Super logarithm が導入され、それを突破口とし更なる精密化が出来ること期待されている。ここでは、この問題を最終的に解決するべく研究を遂行する。また、Super logarithm 自身も非常に興味のある研究対象であり、実解析学・調和解析学・ポテンシャル論等を駆使し、その性質の解明に向けて努力する。また、通常のグラディエントを磁場付きに置き換えた不等式の証明に着手し、応用として磁場付きシュレディンガー作用素のスペクトル解析を本計画の中で行う予定である。

(3) 超指数関数的増大度の非線形項を持つ準線形楕円型方程式の解の構造、最小解の爆発と分岐理論の研究の遂行: 上記との関連で Superexponential (Super logarithmの逆関数)が自然に定義される。指数関数を非線形項とする非線形楕円型方程式が対数関数を非有界な最小解(extremal)としてもち、最小解の爆発や分岐理論で鍵になる事がよく知られている。我々は、この事実を Super exponential と Super logarithm に置き換えて成立する理論を構築する。順調に研究が進めば、数値解析によるシュミレーションが出来る段階にまで到達する予定である。この問題においては線形化作用素の定義域との関連で特異解の特異性を正確に捉える必要がある。Super logarithm が解の候補となるため、解が非常に弱い特異性を持つことが考えられ興味深い。以前の研究で準線形退化楕円型方程式の最小解の安定性が既に一般的に証明された事を足がかりに、この困難を退化楕円型方程式論を効果的に応用することで克服する予定である。

3. 研究の方法

各年度を通して CKN 型不等式を中心に古典的不等式(重み付きハーディ不等式、重み付きソボレフ不等式及び、複合型の不等式)の精密化に関する研究が行われる。特に現在までの成果を基礎に、重み付きレリッヒ型の場合を合わせて考察する予定である。これらの研究と同時に「精密化された古典的不等式を共通の手法」とし、楕円型変分問題と対応する非線形退化楕円型作用素に関する諸問題を対象とし分担者・連携研究者・海外の研究協力が専門分野間の有機的関係を深めながら進展を目指して共同研究を行う。具体的には、次の3つの関連する問題の研究を本質的に発展させる計画である。尚、各課題の具体的な担当者は最後に記述されている。

研究計画・方法 (平成24年度)

第1の問題 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式(CKN型不等式)の精密化と対称性の崩れの研究: CKN 型不等式に関し3つの具体的な研究、 $\Delta u = S(x)$ を予定している。

不等式と同値な変分問題の解の存在と対称性の崩れの研究: CKN 型変分問題 ($p > 1$) に対応する線形化作用素は退化あるいは非有界な係数を持つ特異楕円型作用素となる。以前の研究により、 p ラプラシアン Δ の線形化作用素の定性的な性質は既に解明されているので、先ずその理論を特異楕円型作用素に拡張する。次に CKN 型変分問題を対称解(対称な空間におけるextremal)で線形化し、複数の球面調和関数による摂動を加えることにより、重みのベキが十分大きいと対称性が崩れることを証明する。この際、対称性の崩れがおこる範囲を可能な限り定量的に解明したい。また p ラプラシアンを含む CKN 型変分問題も平行して考察する。さらに、 $p = 1$ の場合の重み付き等周不等式に対しても対称性の崩れの考察に着手する予定である。この問題は、「球対称な重み付きルベグ測度による同体積の図形の中で表面積が最小のものが球とは限らない」ことを主張しており非常に興味深い。次に、これらの直接の応用として、対称性の崩れがおこるタイプの変分問題の定式化を試みる予定である。一方、重みのベキが小さいときには、昨年度の結果で解の対称性が得られているので、レリッヒ型の不等式に対して重み付きの関数再構成と非線形ポテンシャル論を効果的に用いて、対称解の存在範囲の解明を行う。

臨界指数の CKN 型不等式の精密化の研究: 昨年度までの研究成果、臨界指数のCKN型不等式が対称な extremal を持たないことが証明されている。これを受けて、この現象は対称性の崩れに起因するのではなく、2次元以上では臨界指数のCKN型不等式がextremal を持たない事を一般論として証明する。具体的には、 $p = q$ の場合には問題はハーディ不等式の missing term の存在に帰着する事に着目し、同様なアイデアを用いることにより下記の「古典不等式における missing term の存在の研究」と同時進行で遂行される。

非臨界 CKN 型不等式の extremal の存在と性質についての研究: 昨年度までに、非臨界 CKN 型不等式の極値関数の存在に関しては既に解明されている。それを受け、臨界の場合とレリッヒ型不等式の場合にextremal の存在と非存在を解明する。具体的には円環領域における concentration 関数を定め concentration compactness の手法を用いる予定である。もし可能なら研究をさらに進め、解空間の構造や重み関数の指数パラメータに関する漸近的な性質の解明を試みる。

第2の問題 古典不等式における精密な無限個のミッシング・タームの存在と応用の研究: 重み付きハーディの不等式は精密な可算無限個の missing term をもつことが既に示されている。対応する線形化作用素を $L = \Delta - S(x)$ (Δ はラプラシアン、 $S(x)$ は 特異なポテンシャルの無限和)とすると、 $Lu = 0$ の球対称で独立な2つの解が、我々の最近の研究で対数の無限積を基礎とする Super logarithm で記述されることが示され、それを突破口とし更なる精密化が出来ることがわかった。今年度は、この問題を最終的に解決するべく研究を遂行する。

研究計画期間中を通して、連携研究者らの協力の下、通常のグラディエントを磁場付きに置き換えた 不等式の導出とその応用として磁場付きシュレディンガー作用素のスペクトル解析を行う予定である。また、Super logarithm 自身も非常に興味のある研究対象であり、その特徴付けや性質の解明に向けて努力する。

第3の問題 非常に大きい増大度の非線形項を持つ準線形退化楕円型方程式の最小解の爆発、解の特異性と分岐理論の研究: 上記研究目的 2. との関連でSuper logarithmの逆関数として Super exponential $SE(r)$ が自然に定義される。半線形で最も単純な場合には $-\Delta u = SE(u)$ に代表されるような非常に大きい増大度の非線形項を持つ方程式を考察する。特に、対称解の特異性、最小解の存在性とその爆発、分岐理論等を中心に解明する。

研究計画方法 (平成25年度以降)基本的には前年と同じであるが、平成24年度の進展状況を見て必要があれば修正していく予定である。上に述べた研究項目の中には既に一定の成果をあげているものもあるが、それらを含めて平成24-27年度で実施する予定である。また、平成24年度で完了しない場合には引き続き研究を継続する予定である。特に研究分担者・連携研究者・研究協力者は、以下に述べる役割分担のもとに研究を進めていく。

堀内(研究代表者)は、ここで述べたすべての問題の研究と各分担者の研究のまとめをする。中井(分担者)は問題 2. を担当し、退化楕円型変分問題に関連する各種空間上の掛け算作用素や特異積分などを専門の「実解析的手法」、「調和解析的手法」で研究し、同時に Super logarithm の定式化を試みる。下村(分担者)は、問題2を担当し、専門の「ポテンシャル論的手法」を用いて楕円型作用素に関する定性的な研究を行う。安藤(分担者)は、問題2を担当し、ミッシング・タームの存在問題の最終解決を目指す。保城寿彦(連携研究者)は昨年度までと同様に超局所解析の視点からすべての問題を考察する。佐藤得志(連携研究者)は問題1を半線形楕円型作用素を中心に担

当する。申請者の今回の研究テーマの一部はスウェーデンの研究機関(シャルマース工科大学数学科)とそこの研究者との共同研究を含む。そのため研究組織に以下の役割で海外研究協力者を含めたいと考えている。P. Kumlin(海外研究協力者)は問題1を担当する。P. Sjogren(海外研究協力者)は問題2を担当し、R. Grigori(海外研究協力者)は問題1と問題3を担当する。特に、通常のグラディエントを磁場付きに置き換えた不等式を応用し磁場付きシュレディンガー作用素のスペクトル解析を行う予定である。

4. 研究成果

(1) Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式(CKN 型不等式)の精密化と対称性の崩れの研究の遂行: Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式の最良定数を実現する解の存在、最良定数のパラメータに関する連続性、対称性の崩れ等が組織的に解明された。p=1 場合の Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式の等周不等式を用いる証明、対称性の崩れの実証が行われた。

(2) 古典不等式における精密な無限個のミッシング・タームの存在とその応用の研究の遂行: 対数の無限積を基礎とする超対数が導入され、重み付きハーディの不等式は可算無限個の missing term をもつことが示された。

(3) 超指数関数的増大度の非線型項を持つ準線形楕円型方程式の解の構造、最小解の爆発と分岐理論の研究の遂行: 非常に大きい増大度の非線型項を持つ楕円型方程式を考察するため超対数の特徴づける微分方程式の研究がなされた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 1 件)

N.Chiba, T. Horiuchi
Radial symmetry and its breaking in the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities for $p=1$,
Proceedings of the Japan academy Series A Mathematical Sciences, 92. 51-55, (2016),
査読有

N.Chiba, T. Horiuchi
On radial symmetry and its breaking in the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities for $p=1$,
Mathematical Journal of Ibaraki University, 47, 49-63, (2016), 査読有

堀内利郎
Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式とその周辺,

数学(日本数学会) 68, 1-23, (2016), 査読有
H. Ando, T. Horiuchi, E. Nakai, Weighted Hardy inequalities with infinitely many sharp missing terms,
Mathematical Journal of Ibaraki Univ., Vol. 46, 9-30, (2014), 査読有

H. Ando, T. Horiuchi, E. Nakai, Some properties of slowly increasing functions,
Mathematical Journal of Ibaraki Univ., Vol. 46(2014), 37-49, 査読有

H. Ando, T. Horiuchi, Missing terms in the weighted Hardy-Sobolev inequalities and its application,
Kyoto J. Math. Vol. 52 (2012), no. 4, 759-796, 査読有

H. Ando, T. Horiuchi, On the weighted rearrangement of functions and degenerate nonlinear elliptic equations,
Math. J. Ibaraki Univ. Vol 44 (2012), 17-31, 査読有

H. Ando, T. Horiuchi, E. Nakai, Construction of slowly increasing functions,
Sci. Math. Jpn. Vol 75 (2012), no. 2, 187-201, 査読有

T. Horiuchi, P. Kumlin, Peter The Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities involving critical and supercritical weights,
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 88 (2012), no. 1, 1-6, 査読有

A. Detalla, T. Horiuchi, H. Ando, Sharp remainder terms of the Rellich inequality and its application,
Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) Vol. 35 (2012), no. 2A, 519-528, 査読有

T. Horiuchi, P. Kumlin, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg-type inequalities involving critical and supercritical weights,
Kyoto J. Math. Vol. 52 (2012), no. 4, 661-742, 査読有

[学会発表](計 7 件)

T. Horiuchi, Remarks on the strong maximum principle involving p-Laplacian, Nonlinear PDE workshop at Tohoku University (International Conference), 2015, Sept. 24-26

T. Horiuchi, Remarks on the strong maximum principle involving p-Laplacian, The 13th Linear and Nonlinear Waves, Date: November 3(Tue)-5(Thu), 2015 Venue: Room 203, Piazza Omi

堀内利郎, 千葉奈緒希
Radial symmetry and its breaking in the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities for $p=1$,
日本数学会(函数方程式分科会), 京都産業大学, 2015年9月13日

劉曉靜、堀内利郎
p-ラプラシアンを含む強最大値原理について
の注意、
日本数学会（函数方程式分科会）、京都産業
大学、2015年9月13日

堀内利郎, Recent progress in
Cararelli-Kohn-Nirenberg inequalities,
International congress of Mathematician
2014 年, 8月21 日, Seoul

安藤広、堀内利郎、中井英一、重み付きハ
ーディの不等式の精密化

に付いて、
日本数学会, 2012年, 3月27日東京
安藤広、堀内利郎、中井英一, Construction
of slowly increasing functions,
日本数学会 2012 年, 3月29日, 東京

6. 研究組織

(1) 研究代表者

堀内 利郎 (HORIUCHI TOSHIO)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：80157057

(2) 研究分担者

中井 英一 (NAKAI EIICHI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：60259900

下村 勝孝 (SHIMOMURA KATUNORI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：00201559

安藤 広 (ANDO HIROSHI)
茨城大学・理学部・講師
研究者番号：60292471

(3) 連携研究者

保城 寿彦 (HOSHIRO TOSHIHIKO)
兵庫県立大学・物質理学研究科・教授
研究者番号：40211544

佐藤 得志 (TOKUSHI SATO)
東北大学・理学研究科・助教
研究者番号：00261545