

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 5 月 24 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540181

研究課題名(和文) 確率過程が定める筒型集合の大域的性質の研究

研究課題名(英文) The study of asymptotic behavior of Wiener sausages for stochastic processes

研究代表者

濱名 裕治 (Hamana, Yuji)

熊本大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：00243923

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：定数ドリフトをもたない場合およびもつ場合の両方において、Brown 運動の球面への到達時刻とその位置の同時分布を与えた。この結果は、Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値に関する公式を導くことにつながり、さらに、時刻が大きくなるときの漸近挙動を与えた。また、関連して Bessel 過程やドリフトをもつ Bessel 過程の到達時刻の末尾確率の漸近挙動が得られた。一方、この研究の過程において、第2種変形 Bessel 関数の零点について、指数に関する正則性や汎用数式ソフトによる計算方法が確立できた。

研究成果の概要(英文)：We give the joint distribution of the hitting time and site of a Brownian motion with and without constant drift. This result yields the formula for the expected volume of the Wiener sausages of Brownian motions and their asymptotic behavior for large time. Moreover we obtain the asymptotics of tail probabilities of first hitting times of Bessel processes with and without the drift. In addition, we find that zeros of Bessel function of the second kind are holomorphic with respect to the indices and establish the method of their calculation with a general-purpose computer soft of computations, Mathematica for example.

研究分野：確率論

キーワード：確率論 確率解析 ベッセル過程 到達時刻 Wiener sausage 変形ベッセル関数

1. 研究開始当初の背景

物理学において、ランダム系とよばれている対象の研究が始まってからずいぶんと時間が経つが、数学においても研究対象として取り上げられ、ランダム係数の作用素のスペクトル理論が活発に研究されてきた。中でも、Poison ポテンシャルをもつランダム Schrödinger 作用素の状態密度関数の Lifshitz tail の研究においては、Wiener sausage の体積およびその一般化の Laplace 変換の漸近挙動が重要な役割を果たすことが指摘され、それを与えるために、大偏差原理という新たな理論がつけられた。その原型は、Kac と Luttinger が行ったランダムに穴をあけた領域での熱方程式の基本解の trace の期待値の挙動の研究にある。また、ランダム媒質中の Brown 運動の大局的な性質を研究する際に、Wiener sausage の体積の Laplace 変換の漸近挙動が重要な役割を果たすことが、以前から知られている。

しかし、実際には、Wiener sausage の体積の大偏差原理自体が解決されたのは、ずいぶんと後になってからのことである。しかし、現在においてもエントロピー関数は与えられていない。また、Brown 運動以外の確率過程に関しては、安定過程に関して小偏差原理が与えられているだけで、その後の発展は見られなかった。

そのような流れの中、奇数次元の Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値の漸近挙動、および、具体的な形が与えられ、偶数次元の場合についても、おおむね解決されるに至っている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、確率過程が定める筒型集合、いわゆる Wiener sausage の体積に関する大偏差原理を確立することであり、具体的には次の2点である。

- (1) Brown 運動の場合について、エントロピー関数を決定する。
- (2) Brown 運動以外の場合について、平均値の漸近挙動や大数の法則を与え、その後、大偏差原理の確立を行う。

3. 研究の方法

(1) ドリフトをもつ Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値の表示については、Laplace 変換が特殊関数で表示できれば、逆変換する手法はすでに共同研究者と開発しているので、その手法を用いて与えることができると考えている。これまでの研究で、Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値については、変形 Bessel 関数とその零点を用いて表現できることが明らかになった。そこでは、変形 Bessel 関数の比で表示された Laplace 変換を、適当な複素関数を経路積分することで逆変換できる形に変形するという手法が

用いられた。今までは、Laplace 変換が特殊関数の比で表されている場合、その確率分布の性質はある程度わかるが、分布そのものの具体的な形を知ることができなかった。この手法は、Wiener sausage と関連して、Bessel 過程の到達確率の分布関数を与える際に、共同研究者と開発したものである。被積分関数と積分経路を場合に依じて適切に選ぶことが必要ですが、被積分関数の与え方によってさまざまな公式が得られるので、非常に汎用性が高いものと言える。また、ずれをもたない Brown 運動の場合は、球の Newton 容量が現れることがわかっているので、ポテンシャル論を用いる方法も検討し、有効性がわかればこちらの方からのアプローチも考える。

(2) ピン留め Brown 運動に対する Wiener sausage の体積に対するエントロピー関数は、ピン留めしない場合のものと同じになることが、先行する結果から推測できるので、Cameron-Martin の公式等確率解析で用いられる手法を使って示す予定である。

(3) Brown 運動の到達時刻の Laplace 変換から Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値の Laplace 変換が求まるが、Brown 運動に限らず、一般の確率過程を考えても、原理的には同様の方法で求めることができる。多次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程に対する Wiener sausage の体積の期待値の表示と時刻が大きいときの漸近挙動については、最初に Ornstein-Uhlenbeck 過程の到達時刻の Laplace 変換を求めることを試みる。これには、確率解析が有効になるものと考えますが、主導原理が同じなだけで、到達確率の Laplace 変換の形によっては、計算が進まなくなる可能性がある。この場合は、Laplace 変換に頼らずに到達時刻の分布関数を求める必要があるが、その際には、多次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程の標本路の性質を詳しく調べる必要がある。これにも確率解析を用いることが有効であろう。現段階では、Ornstein-Uhlenbeck 過程の到達確率の Laplace 変換は、適当な特関数の比で書けるものと考えている。さらに、それを逆変換すれば、体積の期待値が具体的に与えられ、時刻が大きいときの漸近挙動も求めることができるが、表示に用いられる特殊関数によっては逆変換が非常に困難となることも考えられ、そのときは、一度原点に戻り、Brown 運動の場合に用いられた手法を使って、期待値の漸近展開することも考えている。

4. 研究成果

(1) ドリフトをもたない偶数次元 Brown 運

動に対する Wiener sausage の体積の期待値は、具体的な形は、すでに公式として与えられているが、その公式を用いて漸近展開をえることができた。奇数次元の場合は、すでに解決されているので、この結果と合わせて、漸近展開に関しては完全に解決されたことになる。偶数次元の場合、奇数次元では現れなかった対数の項が多く現れることがわかり、奇数次元との違いが際立つことになった。Wiener sausage の体積の期待値は、ある種の熱方程式の解の積分で表示できる。熱方程式は次元による違いが現れないため、得られた結果は、専門家の間で、興味を引くものとなった。

- (2) Brown 運動の球面への到達時刻とその到達場所との同時分布は、定数ドリフトをもつ Brown 運動の球面への到達時刻の分布を研究する際に、本質的な役割を果たすことがわかる。今回、その多次元 Laplace 変換を求めることができ、変形 Bessel 関数と Gegenbauer 多項式を用いて記述されることがわかった。ドリフトをもたない Brown 運動の原点からの距離は Bessel 過程となり、拡散過程の一般論からその到達確率が計算できるのであるが、ドリフトをもつ Brown 運動の場合、ドリフトが定数の場合であっても、原点からの距離が拡散過程とはならず、そのことが解析を困難にしている。しかし、この場合、球面への到達時刻は、Brown 運動の歪積表現を用いることで、単位球面上の Brown 運動の Laplace 変換を求めることに帰着される。そして、これは Stroock 表現を用いて、偏微分方程式を導き、その解を表示することで得ることができる。そこで用いられた手法は、確率解析を専門とする研究者に多様体上の確率過程への応用への関心をもたらしただけでなく、偏微分方程式の専門家に対しても興味を抱かせるものとなった。
- (3) 一般に Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値の Laplace 変換は、その Brown 運動の球面への到達時刻の Laplace 変換を用いて表すことができる。これは、Brown 運動が定数ドリフトをもつ場合にもあてはまることであるが、その Laplace 変換を逆変換することにより、ドリフトをもたない Wiener sausage の体積の期待値の無限和で表示されることがわかり、その係数は、変形 Bessel 関数と Gegenbauer 多項式で記述されることが得られた。この結果から、時刻が大きくなる時の漸近挙動を与えることができ、そのことで、Wiener sausage の体積に関する大数の強法則を導くことができる。専攻する研究でも、大数の強法則が得られていたが、極限値の決定までには至っておらず、今

回、得られた結果は、ドリフトをもつ Brown 運動に対する Wiener sausage の体積についての、最初の精密な極限定理の結果であるということができる。これは、今後、さらに精密な極限定理の研究への出発点である。

- (4) Bessel 過程の到達時刻は、それが有限という条件付を付けた下での分布が、無限分解可能となっている。それを示すには、第 2 種変形 Bessel 関数の比を考える必要があるが、一方で、これは Wiener sausage の体積の期待値を表示する際にも現れることがわかっている。Bessel 過程および Wiener sausage の体積の研究を遂行するにおいて、第 2 種変形 Bessel 関数の性質、特に零点に関する性質が必要となった。その研究過程において、零点の値を汎用ソフトで計算する手法を開発することになったが、グラフを描くことにより、変形 Bessel 関数の指数に関する連続性が予想されるに至った。本研究の目的とは離れるが、指数に関する正則性などの指数に関する局所的な挙動を示すことができた。第 2 種変形 Bessel 関数の零点に関しては、あまり多くのことはわかっておらず、この分野の研究の進展を一步押し進めることとなった。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

Yuji Hamana

The expected volume and surface area of the Wiener sausage in odd dimensions

Osaka Journal of Mathematics 49 巻  
pp.853-868, 2012 年, 査読有

<http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1355926878>

Yuji Hamana and Hiroyuki Matsumoto

The probability densities of the first hitting times of Bessel processes  
Journal of Math-for-Industry 4B 巻  
pp.91-95, 2012 年, 査読有

<http://j-mi.org/articles/index/11>

Yuji Hamana and Hiroyuki Matsumoto

The probability distribution of the first hitting time of Bessel processes  
Transactions of the American Mathematical Society 365 巻  
pp.5237-5257, 2013 年, 査読有

<http://www.ams.org/journals/tran/2013-365-10/home.html>

Yuji Hamana and Hiroyuki Matsumoto

Asymptotics of the probability distributions of the first hitting time of Bessel processes

Electronic Communications in Probability 19-5 巻

pp.1-5, 2014 年, 査読有

DOI:10.1214/ECP.v19-3215

Yuji Hamana

Asymptotic expansion of the expected volume of the Wiener sausage in even dimensions

Kyushu Journal of Mathematics 70 巻 pp.167-196, 2016 年, 査読有

DOI:10.2206/kyushujm.70.167

Yuji Hamana and Hiroyuki Matsumoto

Hitting times of Bessel processes, volume of Wiener sausages and zeros of Macdonald functions

Journal of the Mathematical Society of Japan, 掲載予定, 査読有

Yuji Hamana and Hiroyuki Matsumoto

Hitting times to spheres of Brownian motions with and without drifts

Proceedings of the American Mathematical Society, 掲載予定, 査読有

Yuji Hamana and Hiroyuki Matsumoto

A formula for the expected volume of the Wiener sausage with constant drift  
Forum Mathematicum, 掲載予定, 査読有

〔学会発表〕(計 11 件)

濱名裕治・松本裕行, ベッセル過程の到達時刻の分布について, 日本数学会秋季総合分科会, 2012年9月18日, 九州大学

濱名裕治・松本裕行, 偶数次元 Wiener sausage の体積の期待値について, 日本数学会秋季総合分科会, 2012年9月18日, 九州大学

濱名裕治, ベッセル過程の到達時刻について, 日本数学会九州支部例会, 2013年10月26日, 宮崎大学

濱名裕治, ベッセル過程の到達時刻について, 共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」, 2013年11月12日, 統計数理研究所

濱名裕治, Bessel 過程の到達時刻に対する Levy 測度について, 研究集会「マルコフ過程とその周辺」, 2013年11月14日, 東北大学

濱名裕治・松本裕行, ベッセル過程の到達時刻の尾確率について, 確率論シンポジウム, 2013年12月17日, 京都大学

濱名裕治, ベッセル過程の到達時刻の挙動について, 日本数学会九州支部例会, 2014年2月15日, 琉球大学

濱名裕治, Wiener sausage の体積の漸近挙動について, 日本数学会九州支部例会, 2014年10月25日, 鹿児島大学

濱名裕治・松本裕行, Hitting times to spheres of Brownian motion with and without drift, 新潟確率論ワークショップ, 2015年1月23日, 新潟大学

濱名裕治, ドリフトをもつブラウン運動の到達時刻と Wiener sausage について, 研究会「神戸 Workshop 格子上の確率解析とその周辺」, 2015年3月18日, 神戸大学

濱名裕治・松本裕行, 定数ドリフトをもつブラウン運動の到達時刻と Wiener sausage について, 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月13日, 京都産業大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

濱名 裕治 (HAMANA, Yuji)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号: 00243923

### (2) 研究協力者

松本 裕行 (MATSUMOTO, Hiroyuki)