

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540184

研究課題名(和文) 計算調和解析—関数近似と離散表現

研究課題名(英文) Computational harmonic analysis - approximation of function

研究代表者

岡田 正己 (OKADA, MASAMI)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：00152314

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：不規則に配置された点での観測値から元々の関数を、よく再現する不規則サンプリングの方法を研究した。

特に新しいのは、多次元ユークリッド空間内の無限に広がった不規則配置点上でのサンプリング近似における正定型関数を用いる方法を数学的に確証したことであり、その数理解析と近似誤差評価式の確立、さらに、その応用可能性について納得できる結果が得られたことである。理論的な側面では、整数格子点での古典的なサンプリング定理を、必ずしも帯域制限のない関数に適用できるように一般化したときの近似誤差評価と同じオーダーの近似度が得られることを示すことができた。そこでは、多変数の多項式近似についての新たな知見が鍵となった。

研究成果の概要(英文)：We investigated the general sampling theorem for scattered data in multi dimensional Euclidean spaces, which means the reconstruction of unknown functions from their data observed on irregularly scattered infinite points. In particular, we established the mathematical theory of the method of using suitable positive definite functions. In fact we have succeeded in proving an optimal approximate error estimate previously known for the regular sampling case and the applicability of the method. One of the key points is a breakthrough on the multi dimensional polynomial approximation.

研究分野：計算調和解析学、応用数理

キーワード：実解析学 サンプリング定理 多変数関数近似 データ解析

1. 研究開始当初の背景

(1) 古典サンプリング定理において、関数の帯域制限条件や等間隔点での補間という2つの条件を緩めた場合に、どの程度の近似的な再生が可能か、またその方法は?という問題は「一般サンプリング定理」と呼ばれ、応用上の重要性もあり、世界中で研究が行われてきた。もっと具体的には、前者の条件を緩めた研究では、特に1次元の場合には、近似誤差評価も含めて、既に研究代表者によってもほぼ満足すべき結果がえられていた。さらに後者の条件だけを緩めた研究では、科学計算への応用研究において、球対称の条件付き正定符号関数(Radial Basis Function)を用いた計算機援用の解法が近年よく知られており、2005年のウェンドランドの教科書に纏められている。但し、一般次元の場合を扱っているのではあるが、有限個の点でのサンプリング補間しか扱っていない。以上みたように、一般的な場合として、2条件の両方を緩めた、無限個のサンプリング点での補間に関する数学的研究は、とくに2次元以上で不完全のままであり、重要な研究課題として残されていた。

(2) “規則格子においてサンプリングするなら不確定性原理の制限を受けるが、不規則格子なら、却って、巧みに解像度の壁を越えられることがある”という疎な情報を扱う場合に極めて有効な「圧縮センシング」の飛躍的研究が、上記(1)のような連続情報の離散表現という観点から、関連していないかという問題意識も興味深いと考えられた。

2. 研究の目的

(1) 不規則な配置をした点で指定された値をとる関数の優れた近似的再構成法を確立することを目的とした。具体的には、原関数と同様の滑らかさをもつ適当な正定型関数を平行移動したものの一次結合和で無限個の点におけるサンプリング補間関数を求める比較的最近に大いに発展してきた方法が適用できないか研究する。数学的には無限行列の可逆性がまず問題となってくる。

(2) そのサンプリング補間を与える線形補間近似作用素によって、原関数の滑らかさに応じた最良の漸近近似誤差評価が得られるのかどうか確認すること。

(3) 多変数関数近似において、1次元で古来よく知られているスプライン関数、もしくはラグランジュ基本多項式に代わるような一般の局所基底関数の構成方法を研究する。

(4) もっと一般的に多変数関数にたいする関数近似法を研究し、効率的な離散表現とその応用を調べる。数値解析や応用数学との関連で、歴史的発展を的確に把握し、今後の展望を与えることも副次的目的とする。

3. 研究の方法

(1) 近似計算に最適な基底関数の構成: H.Wendlandの著書を参考にして、計算数学・数値解析の方面で、不規則格子上に関数値が与えられる場合の関数補間近似法として研究されている球対称の条件付き正定型関数(Radial Basic Function)を用いた再生核の理論を援用できるか検討することから始めた。まずは、無限個の観測点で補間するという目的に合致した正定型関数の例を確認し、再生核の理論を我々の研究課題に沿う形で復習する必要がある。

(2) 実解析の方法による多項式近似の研究とサンプリング近似誤差評価への応用: 1変数の場合と違って多変数の場合は、スプライン関数による近似は困難が予想されるので、近似誤差評価のためには、多項式近似の基礎に立ち返り、多変数におけるラグランジュ補間多項式に類似した基底関数の構成や、その基本性質を調べることにした。

(3) 関数空間論の応用: サンプリング近似を行うべき原関数がソボレフ空間に属する場合には、ヒルベルト空間の方法が使えるので、まずその場合を扱うことにした。一般の場合には作用素に関する補間定理を考察することも想定した。当初は「圧縮センシング」の方法論も使えるかと期待したが、残念ながら、それは今のところ実現できていない。

(4) 以下のように、毎年、日中韓の調和解析とその応用に関する国際研究集会を開催し、研究討論を行った。(共同で組織委員を務めた)

平成25年度: Harmonic Analysis and its Applications at Seoul (1st EACHAA), ソウル大学 Oct. 24-26, 2013

平成26年度: Harmonic Analysis and its Applications at Mudanjiang (2nd EACHAA), 牡丹江師範大学, Jul. 11-14, 2014

平成27年度: Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo (3rd EACHAA), 首都大学東京, Aug. 10-14, 2015

(5) 定例セミナー研究分担者や本申請課題に密接に関係した他大学の研究者にも、首都大学東京の理工学研究科数理解析科学専攻における数理解析セミナーでの研究発表を随時依頼し、研究討論の機会を設けた。

(6) 国際共同研究

平成24年度: G.Kerkyacharian氏(パリ大学教授)らと研究討論を行った。

科研費から旅費支援を受け、たいへん有効であった。6月13日 - 17日, パリ第6大学

平成27年度:Y.K. Cho氏(Prof. Chung-Ang Univ.)および、彼の大学院生と共同研究を行った。科研費から旅費支援を受け、大いに有意義であった。9月30日 10月3日, Chung-Ang Univ., Seoul

(7) 海外研究協力者の招聘

平成25年度:N.R. Shieh氏(国立台湾大学名誉教授)を招聘し研究打ち合わせを行った。2013年11月25日 30日, 首都大学東京

4. 研究成果

(1) ある正定型関数の平行移動の一次結合の全体からなる空間を完備化した空間の中で、ある条件をみたす以外は任意の原関数にたいするサンプリング補間関数が一意に求まるために、もともとの正定型関数の満たすべき条件を求めた。詳しく述べると、ポッホナーの定理により、そのフーリエ変換が至る所で非負の関数であることは知られているが、真に正である領域がいくらでも大きい半径の球を含むという、文献には見当たらない新しい精密な十分条件を与えた。実際、このときに、問題となる無限行列が2乗ノルム数列空間にたいしてノルム同値を与えることをフーリエ変換の基本的性質を用いて示せた。無限行列の可逆性についての一般論は存在しないはずなので、一つの興味深い典型例を発見したことになると思われる。フーリエ解析の応用としても意外なもので、興味がある。これにより、ある観測点で1をとり、他の観測点で0となる基底関数が得られて、サンプリング補間近似関数は、そういうものの一次結合という線形和の単純な形で表現されることになる。

(2) 不規則配置をした無限個の点からなる集合が満たすべき自然な条件として、準一様分離条件を見出した。これは、(1)での結果を得るための自然な条件でもあった。これは規則的格子配置をもっと一般にした条件になる。勿論、その単なる小さな摂動とは限らない、もっと一般になったゆるい条件である。

(3) 原関数がある滑らかさをもつとき、上のようにして得られたサンプリング補間近似関数との近似誤差を調べることは数学的に極めて望ましいが、観測点が準一様分離条件を満たしながら密になっていくときに、漸近近似誤差を上から評価するノルム不等式について、原関数の滑らかさに一致するような、規則格子の場合と同じ最良のオーダーが得られることを証明した。個々の観測点集合の詳細によらないある絶対的定数倍のノルム評価不等式である事実は興味深いと考えられる。

(4) 上の評価式を得るために、証明では基

底関数として、多変数のラグランジュ基本関数に類似した多項式を用いたが、その構成法なども一つの重要な成果と考えている。具体的に述べると、漸近近似誤差のノルム評価不等式を示すには、全ての観測点で0である多変数関数が一定以上の滑らかさを満たすソボレフ空間に属するときに、その関数のソボレフノルムが滑らかさに応じて十分小さい、という補題に持ち込む。つまり、原関数からサンプリング補間近似関数を引いた関数に対して補題を適用する。これは、一変数の関数近似論では伝統的なやり方である。補題の証明には、局所的に、一般の変数 x でのテイラー展開を用いるが、 x の近くでのいくつかの適切に選んだ観測点について、低次の多項式項の和が打ち消されるように、ラグランジュ基本多項式にあたるものが存在することを構成的に証明できる。そのために行列式の計算が有用である。多変数の場合なのでやや複雑であるが、ここでスケリングの議論を用いれば、規則格子の場合の小さな摂動に帰着することができて、途中の行列式の絶対値が0から離れた有限の値であることを示すことができる。後は、局所的な不等式を全域に足し合わせるだけで、求める誤差評価不等式を得る。以上は、日本語での口頭発表をすませている。

(5) 数値解析、科学計算での応用を念頭において、ラグランジュの補間多項式やチェビシェフの多項式から始め、関数補間法の歴史を調べて、多変数一般サンプリング定理の位置づけを試みた。これは、科学啓蒙雑誌『数理解析』の2015年11月号「フーリエ解析の探求」の中に、フーリエ解析と科学計算という章を寄稿するように依頼を受けて整理したものである。案外、広くは知られていないテーマなので、啓蒙的意義はあると考えている。

以上、不規則配置一般サンプリング近似定理について、若い頃からなじんできたフーリエ解析の方法を用いることにより、従来からの課題に一応の解答を与えることができたと思われるので、国内外で行ってきた口頭発表を総合した英文論文を国際的専門雑誌に投稿すべく準備中である。

停年直前の4年間にわたって科学研究費補助金による研究支援を受けたことを感謝したい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

(1) 岡田, サンプリング値の補間による未知関数の近似的再構成, 数理解析研究所講究録 第1869巻2013年 p.58-68(査読無)

- (2) 岡田, フーリエ解析と科学計算, 『数理科学』, 「フーリエ解析の探求」
2015年11月号 p.22-28, サイエンス社(査読無)

〔学会発表〕(計5件)

- (1) Okada, Approximate reconstruction of unknown functions by an interpolation of values sampled on scattered points and a sharp error estimate, June 14, 2013, Beijing Normal University, China
- (2) 岡田, 2次元近似サンプリング定理にむけて—不規則配置の場合, 日本数学会年会実関数論分科会, 2014年3月17日, 学習院大学(東京都・豊島区)
- (3) Okada, Sampling approximation of functions on scattered points, ICM 2014 Satellite Conference in Harmonic Analysis, August 6, 2014, Gwangju, Korea
- (4) 岡田, 森田正紀, 不規則サンプリング補間と近似誤差の数理, 2014年11月8日, 大阪教育大学(大阪市・天王寺区),(予稿集あり)
- (5) 岡田, 古典フーリエ解析の応用に憧れた40年, 調和解析セミナー, 2015年12月25日, 首都大学東京(東京都・八王子市),(報告集あり)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:

取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
研究室のホームページに研究状況、成果などもリンクして公開している。

<http://www.comp.tmu.ac.jp/okmas/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡田 正己 (OKADA MASAMI)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 00152314

(2) 研究分担者

森藤 紳哉 (MORITOU SHINYA)
奈良女子大学・自然科学系・教授
研究者番号: 30273832

上野 敏秀 (UENO TOSHIHIDE)
東京大学・医学(系)研究科(研究院)・助教
研究者番号: 40381446

澤野 嘉宏 (SAWANO YOSHIHIRO)
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 40532635

(3) 連携研究者

()

研究者番号: