

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 9 月 23 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540186

研究課題名(和文)退化型及び特異型ケーラー・シーゲル系の適切性に関する新展開

研究課題名(英文)On new approach for wellposedness for degenerate and singular Keller-Segel systems

研究代表者

杉山 由恵 (Sugiyama, Yoshie)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：60308210

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：退化型，特異型を共に考慮した放物放物型方程式Keller-Segel系(KS)の弱解の一意性について考える．多孔質媒質方程式の弱解については連続性がHolder連続性が最適な正則性であることから，(KS)についてもHolder連続なクラスで一意性を確立することは妥当である．我々は全ての空間次元において， $m > \max(1/2 - 1/N, 0)$ のもとでHolder連続な(KS)の弱解について一意性定理を確立した．我々はその証明において，所謂“duality argument”と“vanishing viscosity method”と呼ばれる手法を組み合わせることで退化性に由来する困難さを克服している．

研究成果の概要(英文)：The Keller-Segel system contains several parameters which cause numerous structures such as linear, degenerate and singular type of PDE. In particular, the degenerate type contains the unknown function as the coefficients breaking down uniform ellipticity, which makes the problem more difficult in comparison with the other types. The Keller-Segel system itself is characterized as the parabolic-parabolic and parabolic-elliptic both of provide us an important research theme. Indeed, we need to handle these types in accordance with the characteristic features of equations. In this talk, we shall bring a focus onto the parabolic-parabolic and parabolic-elliptic Keller-Segel systems of the singular and degenerate types and show uniqueness of weak solutions in the class of Hoelder continuous functions.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：退化放物型方程式 Keller-Segel系 初期値問題の局所適切性 解の一意性 解の有限時間爆発 Navier-Stokes方程式

### 1. 研究開始当初の背景

理工学における典型的な拡散現象は線形熱方程式による近似が多く用いられる。もっとも単純なモデルはラプラス作用素によるものであり、移流項を考慮したものとしては、フォッカープランク方程式が知られている。これらは、重ね合わせの原理といった物理学の基本法則を提唱するなど、よりよいモデルとして近年も盛んに研究されている。しかし、数理生物学における単細胞アメーバであるタマホコリカビの(化学物質の発散過程に依存する)集中現象を解析するには、次の Keller-Segel system (以後 KS と略記) と呼ばれる非線形拡散方程式が有効である。

$$u_t = \Delta u^m - \nabla \cdot (u^{q-1} \nabla v),$$

$$\tau v_t = \Delta v - \gamma v + u$$

KS は単細胞生物の密度の時間発展を追跡する数理生物モデルとして 70 年代に提唱された反応拡散型方程式系である。半線形型については、解の時間大域的存在や有限時刻における爆発が知られており、流体力学におけるナビエ・ストークス方程式と同様に、今日数理生物学における確固としたモデルと目されている。半線形型、退化準線形放物型である KS は、空間次元と初期データとの微妙なバランスのもとに、時間大域解と爆発解の存在が顕著に現れる非線形方程式のモデルとして 1980 年代から活発に議論されてきている。国内においては、永井敏隆、鈴木貴、仙葉隆の 3 氏を中心に、毎年京大数理解析研究所の研究集会「変分問題とその周辺」の主要な研究テーマとして取り上げられている。

### 2. 研究の目的

研究では数理生物学のモデルである非線形偏微分方程式を研究対象とする。具体的には線形熱方程式や多孔質媒質 (Porous Medium) 方程式を第 1 次近似としてとらえ、その高次近似をも考慮にいたした Keller-Segel system を主要な研究対象とし、小さい初期条件に対して、時間大域解の存在、一意性、安定性、といった“適切性”を研究する。また、大きい初期条件に対しては、解の有限時間爆発現象や漸近挙動を関数解析的・接合漸近展開の両手法により明らかにする。更に解のクラスを測度値解まで広げることで、大きい初期値を持つ場合にも“適切性”を論じ、Keller-Segel system の解の構造に関して、初期値の大きさに依存しない統一理論を構築することが本研究の目的である。

### 3. 研究の方法

空間高次元での界面の決定には、曲面の退化次数が障害となり、これまでの空間一次元の場合の証明方法とは本質的に異なる。時間発展とともに、退化次数がどのように変化するかなど、微分幾何学や位相幾何学

的な考察も必要となる。非線形方程式自身の構造と、解によって決定される界面の位相幾何学的な性質はこれまでも重要な研究対象であったが、退化型方程式を切り口に高次元空間における理論の展開を試みる。このように本研究では、KS の退化次数  $m$  と非線形性の次数  $q$  に焦点をあて、申請者の研究グループを中心とした数理解析研究所での研究集会や Max Planck 研究所におけるプロジェクトを更に発展させる。

### 4. 研究成果

退化型、特異型を共に考慮した放物放物型方程式 Keller-Segel 系 (KS) の弱解の一意性について考える。多孔質媒質方程式の弱解については連続性が Holder 連続性が最適な正則性であることから、上記方程式系 (KS) についても Holder 連続なクラスで一意性を確立することは妥当である。我々は全ての空間次元において、 $m > \max(1/2 - 1/N, 0)$  のもとで Holder 連続な (KS) の弱解について一意性定理を確立した。我々はその証明において、所謂“duality argument”と“vanishing viscosity method”と呼ばれる手法を組み合わせることで退化性に由来する困難さを克服している。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

- [1] M. Miura and Y. Sugiyama, On uniqueness theorem on weak solutions to the parabolic-parabolic Keller-Segel system of degenerate and singular types, *J. Differential Equations*, 257 (2014), 4064-4086.
- [2] Y. Sugiyama, Partial regularity and blow-up asymptotics of weak solutions to degenerate parabolic system of porous medium type, to appear in *Manuscripta Mathematica*.
- [3] Y. Sugiyama, Y. Tsutsui, J.J.L. Velázquez, Global solutions to a chemotaxis system with non-diffusive memory, *J. Math. Anal. Appl.*, 410 (2014), 908-917.
- [4] Y. Seki, Y. Sugiyama and J.J.L. Velázquez, Multiple peak aggregations for the Keller-Segel system, *Nonlinearity*, 26 (2013) 319-352.
- [5] S. Luckhaus, Y. Sugiyama and J.J.L. Velázquez, Measure valued solutions of the 2D Keller-Segel system, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 206 (2012), 31-80.
- [6] Kozono, Hideo; Sugiyama, Yoshie; Yahagi, Yumi Existence and uniqueness theorem on weak solutions to the parabolic-elliptic Keller-Segel system, *J. Differential Equations* 253 (2012),

2295–2313.

[7] H.Kozono, Y.Sugiyama and T.Wachi, Uniqueness theorem of mild solutions to the Keller-Segel system in the scaling invariant space, *J. Differential Equations*, 252 (2012), 1213-1228.

[8] Y. Sugiyama, Finite speed of propagation in 1-D degenerate Keller-Segel system, *Math. Nachr.*, 285 (2012), 744-757.

〔学会発表〕(計 件)

[1] Y. Sugiyama, Keller-Segel 系の解の構造について, 南大阪応用数学セミナー, 2012 年 6 月 16 日.

[2] S. Luckhaus, Y. Sugiyama and J.J.L. Velazquez, Measure valued solutions of the 2D Keller-Segel system, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando, USA, 2012 年 7 月 5 日.

[3] S. Luckhaus, Y. Sugiyama and J.J.L. Velazquez, Measure valued solutions of the 2D Keller-Segel system, 5th Euro-Japanese Workshop on Blow-up in Luminy, France, 2012 年 9 月 10 日.

[4] Y. Sugiyama, Keller-Segel 系の解の構造について, 大阪市立大学数学研究所 A Big Wave Special Colloquium, 2012 年 9 月 26 日.

[5] H. Kozono, Y. Sugiyama and Y.Yahagi, Existence and uniqueness theorem on weak solutions to the parabolic-elliptic Keller-Segel system, 九州関数方程式セミナー, 2012 年 10 月 19 日.

[6] Y. Sugiyama, On the Structure of solutions to Keller-Segel systems, PDE Working Group seminar, Imperial college London, 2012 年 10 月 26 日.

[7] S. Luckhaus, Y. Sugiyama and J.J.L. Velazquez, Measure valued solutions of the 2D Keller-Segel system, Yonsei university, 2012 年 12 月 5 日.

[8] H. Kozono, Y. Sugiyama and Y.Yahagi, Existence and uniqueness theorem on weak solutions to the parabolic-elliptic

Keller-Segel system, 第 30 回九州における偏微分方程式研究集会, 2013 年 1 月 30 日.

[9] Y.Sugiyama, Keller-Segel 系の解の構造について, 九州大学数理学研究院談話会, 2013 年 7 月 10 日.

[10] Y.Sugiyama, On the Degenerate Keller-Segel system, Nonlinear PDE seminars, KIAS(Korea Institute for Advanced Study), 2013 年 9 月 27 日.

[11] Y.Kagei, T.Kawakami and Y.Sugiyama, Uniqueness theorem on weak solutions to the Keller-Segel system, 南大阪応用数学セミナー, 大阪市立大学, 2013 年 10 月 19 日.

[12] Y.Kagei, T.Kawakami and Y.Sugiyama, Uniqueness theorem on weak solutions to the parabolic-elliptic Keller-Segel system of degenerate and singular types, 日本数学会, 学習院大学, 2014 年 3 月 15 日.

[13] Y.Tsutsui, Y.Sugiyama and J.J.L.Velazquez, Global solutions to a chemotaxis system with non-difusive memory, 日本数学会, 学習院大学, 2014 年 3 月 15 日.

[14] Y.Sugiyama, On existence and uniqueness theorem on weak solutions to parabolicelliptic and parabolic-parabolic the Keller-Segel system of degenerate and singular types, the 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications Autonoma university; ICMAT, Madrid, 2014 年 7 月 7 日 ~ 2014 年 7 月 11 日.

[15] Y.Sugiyama, Uniqueness theorem on weak solutions to the Keller-Segel system of degenerate and singular types, Satellite meeting of ICM2014, KIAS, Seoul, 2014 年 8 月 8 日 ~ 2014 年 8 月 14 日.

[16] Y.Sugiyama, On uniqueness theorem of weak solutions to the parabolic-parabolic Keller-Segel system of degenerate and singular types, 日本数学会, 広島大学, 2014 年 9 月 26 日.

[17] Y.Sugiyama, Uniqueness theorem on weak solutions to the Keller-Segel system of degenerate and singular types,

THE NINTH MEETING ON PROBABILITY AND PDE,  
津田塾大学, 2014年11月12日.

[18] Y.Sugiyama,  
Keller-Segel 系の解の構造について,  
熊本大学談話会,  
熊本大学, 2014年12月11日.

[19] Y.Sugiyama,  
On uniqueness theorem on weak solutions to  
the Keller-Segel system of degenerate and  
singular types,  
浜松偏微分方程式研究集会, 静岡大学, 2014  
年12月24日.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等  
<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~sugiyama/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

杉山由恵 (Sugiyama Yoshie)  
九州大学・数理学研究院・教授  
研究者番号: 60308210

### (2) 研究分担者

該当無し

### (3) 連携研究者

該当無し