様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　6 月　2 日現在

機関番号：32660
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：24540188

研究課題名（和文）ケーラー多様体の弱擬凸領域と超曲面の関数論的研究

研究課題名（英文）Studies on weakly pseudoconvex domains and hypersurfaces in Kahler manifolds

研究代表者
松本　和子（MATSUMOTO, Kazuko）

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：60239093

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：　(1) 2 次元複素射影空間 P_2 の複素および実超曲面 S に対し，Fubini-Study 計量により決まる S までの距離関数 d の Levi form の表示を与えた．その応用として，関数 －(d の a 乗) が強多重劣調和になるための定数 a と，曲面 S の曲率との explicit な関係を求めた．特に，「a=1/2 ととれるか？」という予想に対しては（局所的な考察では）示せないことが分かった．
(2) n 次元複素 Euclid 空間 C_n の実超曲面までの距離関数の Levi form の新たな表示と証明を与えた．

研究成果の概要（英文）：(1) For a complex or real hypersurface S in the 2-dimensional complex projective space P_2, we gave explicit formulas of the Levi form of the distance function d to S decided by Funini-Study metric. As its application, we also give the relations the constant 'a' with the function -(d to the a-th power) to be strictly plurisubharmonic and the curvature of S. In particular, we cannot choose the constant a=1/2.
(2) For a real hypersurface in the n-dimensional complex Euclidean space C_n, we give a new explicit formula of the Levi form of the distance function to S.

研究分野：数学（多変数関数論）

キーワード：多変数関数論　レビ形式　擬凸領域　多重劣調和関数　レビ平坦曲面　曲率

1．研究開始当初の背景

多変数複素解析学において，領域の擬凸性は最も重要な概念の１つである．20 世紀の始めに，多変数正則関数の自然な存在域は，擬凸という局所的な幾何学的性質を持つことが Hartogs により発見され，多変数関数論の分野の開始の１つとなった．逆に「擬凸領域は正則領域である」というのが Oka（岡潔）の有名な定理である．領域 D の境界 S が滑らかな場合に，D が正則領域であるために境界 S が満たすべき幾何学的条件を，S の定義関数で具体的に書き表したのが Levi で，それゆえ，Oka の結果は「Levi 問題の解決」と呼ばれている．

今回の研究を行いたいと考えるに至った動機は，約 10 年前に，「複素射影空間 P_n（n≧2）には Levi flat な実超曲面 S は存在しないであろう」という予想がフランスで数理物理の人によって提起され，多変数複素解析の研究者の間で，突然にホットな話題になったことである．この予想そのものは，n≧3 の場合には，既に Siu 等によって解決されている．その際，曲面 S の P_n での補集合が Stein，すなわち正則領域であることが，本質的に重要である．それは P_n の Fubini-Study 計量で計った S までの距離関数が強多重劣調和であることから説明でき，今では，正の正則双断面曲率を持つ Kahler 多様体の部分領域に対して，Levi 問題が解決されている．

境界の幾何学的条件下での部分領域の関数論の研究の大部分は，多様体または領域の境界の曲率が（ある意味で）正であるか，正の場合に帰着するものである．Hormander, Kohn, Fefferman 等の有名な研究を動機とする国内外の研究は既にいろいろある．

2．研究の目的

今回の研究課題「Kahler 多様体の弱擬凸領域と超曲面の関数論的研究」は，Kahler 多様体 M の擬凸部分領域 D 上の関数論と，D の境界 S の微分幾何学的な性質との関連を，与えられた Kahler 計量から決まる S までの距離関数の Levi form の研究を通して明らかにすることを，主な目的としている．

本研究で取り扱いたい場合は，M が非負の正則双断面曲率を持ち，S が弱擬凸 あるいは Levi flat な場合の Levi 問題，及び，境界としての実または複素曲面そのものである．その関連で，展開可能な複素曲面の，補集合の関数論の立場からの研究も行ないたい．

曲率が非負またはゼロのものを扱うことは難しく，従来の研究成果も少ない．そのようなものに対し，微分幾何学的な研究の可能性を見い出した点に，本研究の最大の特色がある．

曲率ゼロの複素トーラス内では，Levi 問題が解けない Grauert の例があるが，Levi flat な実超曲面に関する Ohsawa（大沢健夫）の予想の通り，そのような例は非常に限られている．その予想の解決のための第１段階は，補集合が Stein になるための境界条件を求めることである．強擬凸な境界点が１点でもあれば Stein になるので，問題は境界が Levi flat な場合に，補集合に（適当な）「強」多重劣調和関数が存在するための条件を求めることに帰着する．その際，境界までの距離関数の Levi form の研究は，この予想の解決（進展）に重要である．

距離関数を用いた評価は，数学の多くの場面で現れるにも関わらず，距離の Levi form を境界 S の定義関数を用いて具体的に書き表したのは，Ohsawa 予想を動機とした，ごく最近の私自身の結果が初めてである．今のところ，本研究以前に結果が得られているのは S が複素 Euclid 空間 C_n の複素部分多様体の場合のみであるが，多様体や領域が一般の場合にも，Levi form を具体的に表現し，退化条件が求められ，Narashimhan 予想の解決を含め，弱擬凸領域における Levi 問題の解決に本質的に役立つと考えている．複素部分多様体 S までの距離の Levi form が常に退化するための必要十分条件は，Fischer-Wu の最近の研究結果と合わせると，S が複素展開可能な曲面になることであり，微分幾何の話題とも結びついて興味深い．研究の進展につれて，さらにいろいろな分野の話題と結びつく可能性を強く感じている．

3．研究の方法

研究課題「Kahler 多様体の弱擬凸領域と超曲面の関数論的研究」の中には
(1)　擬凸部分領域の関数論の，境界の幾何を通しての研究
(2)　弱擬凸または Levi flat な実超曲面の，補集合の関数論を通しての研究
の 2 種類の研究が含まれる．まずは，(1) のタイプの研究から始める．

Oka により，複素 Euclid 空間 C_n の部分領域 D が擬凸であるための必要十分条件は，D の境界までの Euclid 距離 d に対し，関数 －log d が多重劣調和になることである．一般には －log d は弱多重劣調和で，このことは，微分幾何学的には C_n の正則双断面曲率がゼロであることによって説明できる．Grauert により，複素多様体（上の

領域）は，強多重劣調和関数によって exhaust されることが Stein になるための必要十分条件であり，領域上に強多重劣調和な exhaustion function を構成できるための条件を求めることは重要である．一般には local に存在する関数を貼り合わせて関数を構成する方法もあり得るが，そのような場合，何らかの近似的手法が必要であり，領域の境界が弱擬凸または Levi flat である場合の研究には通用しない．領域上必ず global に存在する距離関数の微分幾何学的な厳密な研究は，関数が弱多重劣調和になるための必要十分条件を求めることを可能にし，曲率が非負の場合を含めた Kahler 多様体の部分領域に対する Levi 問題の進展に確実につながる．

そこで，研究の目標は，曲率非負の Kahler 多様体 M の，滑らかな境界 S を持つ弱擬凸領域 D が，Stein になるための良い条件を求めることである．曲率が非負でも，Grassmann 多様体のように Levi 問題が常に解ける場合がある．また，「S の境界が強擬凸な点を 1 点でも含めば Stein か」という Narasimhan 予想（問題）もある．そのような場合を含む結果を，境界 S までの距離の Levi form を，S の情報で表現することによりアプローチすることにつなげたい．

距離関数の Levi form の研究は始めたばかりであり，M が複素 Euclid 空間 C_n の場合に，まず十分に調べておく必要がある．n＝2 の場合にかなり強引な（3 次の連立方程式を解いて逆行列の計算を実行するような）研究を既に行って，S までの距離の Levi form が至る所退化するための必要十分条件を求めた．その結果は，S が C×A（A は C の実超曲面）の形になることであり，それをもとに 2 次元複素トーラスの擬凸領域は，境界が C×A の形でなければ（つまり Grauert の例のようなもの以外は）Stein になることを示したことがあるが，この結果は，本研究のスタートの大きな動機である．実超曲面の実接平面は複素平面を当然含むが，従来の領域の複素解析は，境界の複素平面の情報のみによって行われていた（そのような段階であった）と言っても過言ではないと思う．

具体的な最初の目標は，この結果を n が一般次元の場合に拡張することである． その際，境界 S の定義関数だけではなく，より幾何学的な情報に着目する必要の可能性を感じている．S までの距離の Levi form の退化条件を求めると，n 次元複素トーラスの Levi 問題への応用につながる．

次に，一般の Kahler 多様体 M に対して，境界 S までの Kahler 計量による距離の Levi form と S（の 2 階微分までの情報）との関連公式を導きたい．これは Riemann 幾何学の第 2 変分公式の一種で，複素 Euclid 空間 C_n の場合が十分に分かれば，それほど難しくないのではないかと考えている．S が複素部分多様体の場合を先に調べるのも意味があり，Narasimhan 問題の弱い意味の解決などの応用がある．

S が実超曲面の場合，距離の Levi form の複素接方向の情報の中に S の接平面の中の複素接平面以外の情報が混ざっていろいろと難しくなり，より幾何学的な考察が必要になる．

さらに，今後，Levi flat 実超曲面や，それと関連して複素可展面の研究を行うために，Greene-Wu 等の ruled variety の最近の研究についての勉強を深めておきたい．また，距離関数を用いて行われている複素解析学の種々の研究，Bergmann 計量等の Riemann 計量に寄らない計量や，C_n の実超曲面の関数論的研究について，今後の応用や進展の可能性を考えつつ情報を得ていこうと考えている．

４．研究成果

研究開始当初の研究計画・目的・方法は上記の通りであるが，研究期間の途中で，「複素射影空間 P_n (n≧2) には Levi flat な実超曲面 S は存在しないであろう」という予想に対して，国内外で大きな進展があった．2 次元複素射影空間の Fubini-Study 距離から決まる実超曲面までの距離 d について，「関数 −log d より強く，−(d の 1/2 乗) が強多重劣調和であれば，P_2 の滑らかな Levi flat の非存在がいえる」という情報が，ドイツの Brinkshulte，名大の足立真訓等から入った．同時に，アメリカの Shaw らの研究グループや，フランスの Iordan らのグループも，この問題に着目していることが後に分かった．この問題（距離関数の性質の研究）は，私自身の研究テーマそのもの(の特別な場合）でもあるので，この問題に集中することになった．したがって，一般の Kahler 多様体の複素または実超曲面を考えるのではなく，複素射影空間，特に 2 次元の場合に特化して，研究を行うことになった．

本研究で得られた成果は次の通りである．

(1) n 次元複素 Euclid 空間 C_n の実超曲面 S に対し，S の定義関数として

y_n＝r(z_1,,,,z_{n-1},x_n)

ではなく

ρ(z_1,...,z_n)＝0

の形を用いて，実超曲面 S までの Euclid 距離の Levi form を，S の定義関数 ρの 2 階微分から決まる Herimite 行列と対称行

列を用いて表した．これは，後に，一般の Kahler 多様体で Levi form の公式を求める際の準備を兼ねて行った研究である．結果は，雑誌論文として発表済み（①）である．

(2) 2 次元複素ユークリッド空間 C_2 の実超曲面 S に対し，S の定義関数として

y_2＝r(z_1,x_2)

の形を用いて，S までの Euclid 距離 d の Levi form の新たな表示（従来の行列表示ではなく成分ごとの値）を求めた．新しい表示の応用として，関数－(d の a 乗）が強多重劣調和になる a の値を，S の曲率（定義関数の 2 階微分）の条件下で，explicit に求めた．また，複素射影空間の場合の研究に必要となる Levi form の固有値の評価のための準備となる事柄を示した．

(3) 2 次元複素射影空間 P_2 の複素超曲面 S に対し，Fubini-Study 計量に関する S の までの距離の Levi form の表示を初めて与えた．

(4) 2 次元複素射影空間 P_2 の実超曲面 S に対し，Fubini-Study 計量に関する S のまでの距離 d の Levi form の表示を求めた．方法は，(2) の方法に基づいている．その結果を用いて，－(d の 1/2 乗）が強多重劣調和になるかを調べた．結果は「(残念ながら）成り立たない」ということであった．関数 －(d の a 乗）が強多重劣調和になる定数 0＜a＜1 は存在するという Ohsawa-Sibony の結果はあるが，（ある意味で）局所的な考察では，定数 a はいくらでも 0 に近くなり得ることが分かった．

(2)～(4) の結果は，学会発表済み（②）であるが，雑誌論文としては，現在（複数の論文に分けて）執筆中である．研究の途中で，D-F 指数と呼ばれる量との密接な関係が分かり，領域の hyperconvexty との関連や，結果の応用面（従来の結果の見通しの良い別証明など）でのさらなる検討を行っているところである．

また，研究の途中で，私自身のこれまでの研究成果により，滑らかな実超曲面の「ある種の曲率を表す関数」が得られることが分かった．この関数の最大値を調べる問題は，「複素射影空間 P_n (n≧2) には Levi flat な実超曲面 S は存在しないであろう」という予想との関連で，非常に興味深い．そのためには，距離関数の 3 階以上の微分を調べる必要があり，距離関数の Levi form の表示の改良を行う必要がある．このことと，一般の Kahler 多様体の場合に距離関数の Levi form の公式を求めることは，今後の課題に残された．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Kazuko MATSUMOTO, An explicit formula for the Levi form of the distance function to real hypersurfaces in C_n, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, Vol.60, No.2, 2012, pp.375-381. Doi:10.2206/kyushujm.66.375

〔学会発表〕（計２件）

① 松本 和子, C_2 および P_2 の実超曲面までの距離関数の Levi form の表示と幾つかの性質, 2013 年度多変数関数論冬セミナー（コラッセふくしま), 2013 年 12 月 22 日.

② Kazuko MATSUMOTO, An explicit formula for the Levi form of the distance function to real hypersurfaces in C_n, Geometric Complex Analysis Tokyo 2012 (東京大学大学院数理科学研究科), 2012 年 7 月 26 日.

６．研究組織

(1) 研究代表者

松本 和子（MATSUMOTO, Kazuko）

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：６０２３９０９３