

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 22 日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540189

研究課題名(和文)熱方程式に対する基本解の漸近展開とその応用

研究課題名(英文)Asymptotic expansions of fundamental solutions to heat equations and their applications

研究代表者

岩崎 千里(Iwasaki, Chisato)

兵庫県立大学・物質理学研究科・特命教授

研究者番号：30028261

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：種々の作用素に対応する熱方程式の基本解の構成について考察し、得られた表示を応用する事により、スペクトルゼータ函数の特異点や固有値の解析についての結果を得た。その考察対象とした作用素は、Fokker-Planck作用素、球面上のsubelliptic作用素、冪零リー群上の作用素と幅広く扱った。

さらにGrushin型と呼ばれている退化した楕円型方程式の基本解を、変形ベッセル函数を有効に使うことにより、具体的に記述することに成功した。この手法を複素函数論と密接な関連のある退化した楕円型作用素にも適用できることを示した。

助成期間に得られた研究成果は合計6編の論文として出版した。

研究成果の概要(英文)：I have researched methods of construction of the fundamental solution for heat equations corresponding to various kinds of subelliptic operators. This research is applicable to analyze both eigenvalues of operators and singularity of spectral zeta functions of subelliptic operators. Objects subelliptic operators of my research are the Fokker-Planck operator, subelliptic operators on spheres, operators on Nilpotent Lie groups.

In addition to this kind research I succeeded to get the precise expression of the fundamental solution to degenerate elliptic operators, which are called operators of Grushin type. This study depends on theories of the modified Bessel functions. I show this method is also useful to study of Kohn-Laplacian which is deeply interested in complex analysis.

These results are published in six papers during the term of this aid.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：熱方程式 基本解 冪零リー群 スペクトルゼータ函数 subelliptic作用素 擬微分作用素 Fokker-Planck作用素 国際研究者交流、ドイツ、USA

1. 研究開始当初の背景

退化した放物型方程式の基本解の構成に関しては、2 次の退化の場合にのみしか詳しい形が分かっていない。この正確な形を利用して種々の熱作用素に対する基本解を得ることができる。その一つとして、2011年9月に完成した球面上の退化した楕円型作用素についての共同研究の結果の論文が出版された。これらを基礎として、さらに作用素の適用範囲を広げるとともにより高次の退化を試みることは重要である。より高次の退化した作用素に関しては、Kohn-Laplacian の場合に具体的表示が得られているだけであり、その手法の一般的な構成方法は明らかにされていない。高次の退化した場合に熱方程式の基本解は得られていない。

Fokker-Planck 方程式の基本解を

2. 研究の目的

Nilmanifold 上で自然に定義される退化した熱方程式の基本解を構成することにより、スペクトルゼータ函数の特異点の決定や熱核の漸近挙動に関して調べる。退化しない楕円型作用素に対する熱核との比較を行う。

Fokker-Planck 方程式の基本解の擬微分作用素による表現と、それを使って解の漸近挙動や固有函数展開を得ることを目指す。

2 次で退化した放物型作用素についての結果は様々存在するが、より高次の退化した作用素の熱方程式の基本解の構成は困難であることが判明した。2 次以上の退化をする Grushin 型作用素についての基本解の統一的な構成方法を確立する。

3. 研究の方法

共同研究に関しては、メールでのやり取り以外に、国際研究集会の前後、および相互に訪問をすることにより、研究の進展をした。

4. 研究成果

step が 2 の一般のリー群の場合に広げて、熱方程式の基本解を擬微分作用素として表示することに成功した。この結果を使ってスペクトルゼータ函数の極が唯一つである事、及びその位置、留数の値を求めることができた。これらは、楕円型方程式に対してはスペクトルゼータ函数の極が無限に出現することと大きな違いがあり、退化した楕円型作用素を nilmanifold 上で考察することは有意義な事だと示す事ができた。これは予想以上の成果であり、これらの結果を 2 編の論文として纏め発表した。これまで得られた結果を 2013 年 9 月日本数学会函数解析分科会で特別講演として報告した。

これまでは、もともになるクリフォード代数が正値 2 次形式に相当するもののみ限定されていたが、これを一般の符号を持つ 2 次形式に対応するクリフォード代数にまで拡張しても、2 ステップ冪零リー群の各格子に対応する冪零多様体上には自然なサブリーマン構造がある。この場合に、本研究課題の一つである劣楕円型作用素のスペクトルゼータ函数を考察することは新たな研究課題となる。

基本解の構成を Fokker-Planck 方程式に試みて、基本解の構成とともに固有関数展開についての結果を得た。自己共役でないので、助変数を適当に選べば、一般化された固有函数が出てくる。これは現在まで考察の対象から除外されている場合に相当する。これを 2012 年フィンランドの国際研究集会で発表し、その報告集に論文が掲載された。これらの結果を一般のポテンシャルを持つ Fokker-Planck 方程式の基本解を、正確に求めた基本解の摂動として求めるように拡張出来ると予想できる。

Grushin 型作用素を 2 次の退化に帰着させ、変形 Bessel 関数を使うことを経由して、核関数を具体的に表示することができた。さらにこの手法を複素函数論で重要な Kohn-Laplacian に適用できることも示した。この結果は ISAAC Congress (ポーランド) および Greifswald (ドイツ) の研究集会等で発表して、最近二つの論文として纏めて出版された。Kohn-Laplacian の今後の研究の進展に重要となる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki: The inverse of a parameter family of degenerate operators and applications to the Kohn-Laplacian, *Advances in Mathematics*, Vol.277, 査読有, 283-337(2015), DOI: 10.1016/j.aim.2014.12.041.

W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki: Fundamental solution of a higher step Grushin operator, *Advances in Mathematics*, Vol.271, 査読有, 188-234(2015), DOI:10.1016/j.aim.2014.11.017.

C.Iwasaki: A representation of the fundamental solution and eigenfunction expansion to the Fokker-Planck operator, *Fourier Analysis, Pseudo-Differential Operators, Time-Frequency Analysis and*

Partial Differential Equations, p.211-p. 233,
査読有、Birkhäuser (2014).
DOI: 10.1007/978-3-319-02550-6

W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki,
Trivialization of sub-Riemannian
structures on spheres,
Bulletin des Sciences Mathématiques,
Bull.Sci.math.Vol.137, 査読有, 361-385
(2012),
DOI: 10.1016/j.bulsci.2012.09.004.

K.Furutani-C.Iwasaki-T.Kagawa: An
action function for a higher step Grushin
operator, Journal of Geometry and Physics,
Vol 62, 査読有, 1948-1976 (2012),
DOI: 10.1016/j.geomphys.2012.04.004.

W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki:
Spectral zeta function of the
sub-Laplacian on two step nilmanifolds ,
J. Math. Pures Appl. Vol.97, 査読有、
242-261 (2012) ,
DOI: 10.1016/j.matpur.2011.06.003.

[学会発表](計 13 件)

C.Iwasaki : Construction of a
fundamental solution for parameter family
of operators of Grushin type , 平成 2 7
年 2 月 1 0 日 , Workshop "Geometric and
Singular Analysis"、ポツダム (ドイツ)

C.Iwasaki : Construction of a
fundamental solution for degenerate
operators of Grushin type , 平成 2 6 年 8
月 2 0 日 , Geometry in Nara、奈良女子大
学(奈良県奈良市)

C.Iwasaki : Construction of a
fundamental solution for parameter family
of operators of Grushin type , 平成 2 6
年 7 月 4 日 , NCTS Workshop on Geometric and
Singular Analysis、新竹(台湾)

C. Iwasaki : Construction of a
fundamental solution for a Grushin type
operator and its application to the
Kohn-Laplacian , 平成 2 5 年 1 1 月 1 9 日 ,
Seminar on Functional Analysis and Global
Analysis 2013 , 東京理科大学 (千葉県野
田市)

岩崎千里 : 退化した放物型方程式に対す
る基本解の表象による表示と nilmanifold
上の spectral zeta function , 平成 2 5 年 9
月 5 日 , RIMS 共同研究「微分方程式に対する
幾何解析の展開」, 京都大学数理解析研究所

(京都府京都市) .

岩崎千里 : 退化した放物型方程式に対す
る基本解の表象による表現とその応用, 平成
2 5 年 9 月 2 4 日 , 日本数学会秋季総合分
科会函数解析学特別講演, 愛媛大学 (愛媛県
松山市) .

C. Iwasaki : Construction of the
fundamental solution for a Grushin type
operator and its application , 平成 2 5 年
8 月 1 4 日 , Workshop Analysis:
Sub-Riemannian Geometry, グライフスワル
ド (ドイツ)

C. Iwasaki : Construction of the
fundamental solution for a Grushin type
operator and its application , 平成 2 5 年
8 月 6 日 , ISAAC-2013 , クラコフ (ポー
ランド) .

C.Iwasaki : A representation of the
fundamental solution and eigenfunction
expansion to the Fokker-Planck operator,
解析学コロキウム、平成 2 5 年 5 月 2 9
日 , ミュンヘン (ドイツ)

C.Iwasaki : Construction of the Green
function of the Grushin type operator and
its application , 平成 2 5 年 3 月 2 6 日 ,
Workshop Geometric and Singular Analysis ,
ポツダム (ドイツ) .

C.Iwasaki : Green function of a Grushin
Type Operator , 平成 2 5 年 1 月 8 日 , NCTS
International Conference on Geometric and
Singular Analysis、新竹(台湾) .

C.Iwasaki : Green function of a
Grushin Type Operator , 平成 2 4 年 1 1 月
2 0 日 , Seminar on Functional Analysis and
Global Analysis , 東京理科大学 (千葉県野
田市)

C.Iwasaki : A representation of the
fundamental solution and eigenfunction
expansion to the Fokker-Planck operator,

International Conference on Fourier
Analysis and Pseudo-Differential
Operators, 平成24年6月27日、アアル
ト(フィンランド)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩崎千里 (IWASAKI Chisato)
兵庫県立大学大学院・物質理学研究科・
特命教授

研究者番号：30028261