

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 27 日現在

機関番号：32407

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540190

研究課題名(和文) 解析・調和関数空間の構造とそれら関数空間上の作用素の研究

研究課題名(英文) Researches on the structures of the spaces of analytic and harmonic functions and operators on them

研究代表者

大野 修一(OHNO, Shuichi)

日本工業大学・工学部・准教授

研究者番号：20265367

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主たる課題は「合成」という演算のもつ諸性質を明らかにすることである。数学的には演算の連続(有界)性やコンパクト性の特徴付けが基本的かつ重要な問題であるが、大きな目的は「合成演算」をある種の性質で分類することである。そのためには、2つの異なる合成演算がどのくらい離れているか知ること、即ち、それら演算の「差」についての評価が望まれる。

研究成果の概要(英文)：The object of this research is to investigate the notion of "compositions". It would be one of elementary and important problems to characterize the continuity (boundedness) and compactness of the "composition". Our main purpose is to study the topological structure of "compositions". So we would like to estimate the difference of two different "compositions".

研究分野：数物系科学

キーワード：合成作用素 荷重合成作用素 Hardy 空間 Bergman 空間 Bloch 空間 Dirichlet空間

1. 研究開始当初の背景

単位円板上の解析関数空間の理論は、20世紀初頭の G.H. Hardy, J.E. Littlewood 等による研究を源としている。そして、「関数解析学」の発展に伴い、解析関数からなる空間を線形空間, Banach 空間としてみることによって、理論の発展を導く新しい手法が供給されてきている。

申請者はこれまでに、解析、調和関数空間上の種々の線形作用素の有界性、コンパクト性等の関数解析学的性質を、定義域である関数空間に属する解析、調和関数がもつ関数論的性質で特徴付けることを研究目的としてきた。特に、「合成演算」という基本的な演算でありながら、力学系の理論で使われたり、親から子に受け継がれる遺伝子の研究という生物学的な応用面も持つ「合成作用素」の諸性質の研究を行ってきた。この作用素については 1960 年代中頃から活発に研究が行われていたが、1990 年に Joel H. Shapiro と Carl Sundberg が Hilbert Hardy 空間 H^2 上の合成作用素全体の空間の位相構造について、いくつかの問題を提出した。その一つである、「2 つの異なる合成作用素が同じ連結成分に属することとその 2 つの合成作用素の差がコンパクトであることは同値であるか」という問題は研究者にとって重要な問題になった。申請者はこの問題を、単位円板上の有界解析関数空間 H^∞ において完全に特徴付け、共同研究の結果として 2001 年に発表した。「双曲型距離」を使ったその特徴付けは H^2 空間の場合にも応用され、Bloch 空間上の合成作用素の研究へ発展することとなった。さらに、本申請の研究分担者である泉池敬司(当時新潟大学教授)、細川卓也と 2005 年に H^∞ 上で、泉池教授、海外研究協力者の Jun Soo Choa (韓国・Sungkyunkwan 大学) と 2008 年に有界調和関数空間上で、それぞれ荷重合成作用素の差のコンパクト性を特徴付けた。よって、両空間における荷重合成作用素全体の空間の位相構造、さらに Bloch 空間の場合も含めた解明が望まれていた。

2. 研究の目的

有界解析関数空間及び有界調和関数空間における荷重合成作用素全体の空間の位相構造の解明にまず必要なことは、2 つの荷重合成作用素の差のノルム評価である。研究分担者の泉池敬司フェローと有界解析関数空間上で有限個の合成作用素の一次結合がコンパクトとなる必要十分条件を特徴付け、本質ノルムの評価を行ったが、ノルムの評価は一次結合の係数が正の実部をもつ場合に限られていた。これは、有界解析関数空間上の 2 つの合成作用素の差のノルム評価の論文の足りないところを指摘することにもなった。困難さは円板の境界である単位円周上の解析関数の挙動の把握によっている。また、作用素論研究者から、有界な解析関数

空間上の合成作用素の位相構造問題について、作用素の強位相の場合の特徴づけという示唆を受けているので、その問題も視野に入りたい。特に、 H^2 空間の場合、未解決の合成作用素の不変部分空間問題をはじめとした作用素論的立場からの問題も考えたい。以上のことから、この研究課題は作用素論との接点を深めることが予想される。Bloch 空間上については、研究分担者の細川卓也准教授と、合成作用素の位相構造の解明を試みる。まず、コンパクトな合成作用素の集合が一つの連結成分になっていることを証明したい。また、これに関連した有界解析関数空間から Bloch 空間への有界性、コンパクト性を完全に特徴付けたい。

3. 研究の方法

本研究目的の各問題について、解析関数空間の場合に適用できそうな調和関数空間の手法や判例といった応用可能な知見を得ているので、研究代表者が中心となり、研究分担者と国内外の研究協力者も含めて、e-mail による情報交換、研究打ち合わせの出張による討議、検討により目的を達成したい。特に、泉池フェローとの共同研究は、夏、春季休暇期間中の新潟大学での 1 週間程度の滞在で行われた。もともとこの方法は泉池フェローの外国研究者との共同研究は何の準備もない 2 週間程度の大学滞在中に端を発しているという示唆に因る。氏と新潟大学数学教室の御好意により、コンピュータ付のオフィスを用意していただき、集中的に研究が出来た。Bloch 空間上の合成作用素についての研究も、研究協力者の細川准教授と、随時草稿を添付した e-mail による情報交換を行い、夏、春季休暇期間中の茨城大学への出張で集中的に押し進めた。

また、関連分野の知識の交流および獲得のため、大野は 2001 年より日本工業大学において「宮代セミナー」を年 2 回程度主催しているが、本研究期間中も開催した。2013 年 1 月に Erno Saukko (フィンランド・Oulu 大)、2015 年 1 月には Quang Dieu Nguyen (ヴェトナム・Naio 教育大学) も合わせて招聘した。彼らとの共同研究も引き続き行っている。

4. 研究成果

(1) 有界解析関数空間及び有界調和関数空間における荷重合成作用素全体の空間の位相構造を研究分担者の泉池敬司フェロー、泉池祐子との共同研究で完全に解明した。コンパクトな荷重合成作用素の集合は容易に弧状連結であることが示せ、任意の 2 つの荷重合成作用素はこのコンパクトなものを通じて結べてしまうので、本質的にはコンパクトでない荷重合成作用素の集合を分類することになる。このことにおいて、作用素ノルムと本質的作用素ノルムの位相のそれぞれで特徴付け、後者の位相より前者の位相による

構造のほうが「細かい」という知見を得た。また、その特徴付けは H^∞ の極大イデアル空間上の Gelfand 変換によったが、関数論的な単位円板上の解析関数の挙動による考察も試みた。さらに、これら空間に関連した disk 環などでも成果を得た。

(2) Hardy-Hilbert 空間 H^2 上の合成作用素の Hilbert-Schmidtness に関連して、 H^2 と Dirichlet 空間の間の Hilbert-Schmidtness も特徴付けられていたが、基本的な問題である有界性、コンパクト性は調べられていなかった。そこで、具体的な例を作成するとともに、その完全な特徴付けを行った。合成作用素のシンボルとなる関数の値域と円周との接触の仕方の例は微分幾何学的にも興味深いものとなっている。Dirichlet 空間は Mobius 変換に関して不変な Besov 空間 B_p^1 ($1 < p < \infty$) と呼ばれるもの (B^2 にあたる) で、Hilbert (内積) 空間になっている。Mobius 不変な最大の関数空間が Bloch 空間であり、最小のものが B_{-1} と略記されるものである。上の問題に関連して、little Bloch 空間と H^∞ の共通部分の空間と B_{-1} 上でそれぞれ荷重合成作用素の有界性、コンパクト性を特徴付けた。前者は、1980 年代に研究された Douglas 環の理論で出てくる興味深い空間であるが、この研究によって合成作用素の新しい研究領域を示したことになる。また、後者は多項式を含む小さな空間で、 $1 < p < \infty$ の場合の手法が使えず、残されていた場合でもあった。

(3) 研究分担者の泉池敬司フェローとの共同研究で、 $1 \leq q < p < \infty$ のとき H^p から H^q へ作用する荷重合成作用素の位相構造について考察した。合成作用素のシンボルとなる関数が絶対値 1 になる部分の状況に応じて完全に特徴付けられることが判明した。 H^2 と Bloch 空間や Dirichlet 空間間の合成作用素の位相構造について、研究分担者の細川卓也准教授と考察したが、Bloch 空間の場合は解決には至らなかった。Dirichlet 空間の場合については、泉池フェローも加わり、2 つの荷重合成作用素の差のノルム評価を与え、荷重合成作用素の差のコンパクト性を特徴付けた。その手法は新しいアプローチと道具を提供している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 26 件)

① Kei Ji Izuchi, Yuko Izuchi and Shuichi Ohno, Topological properties of path connected components in spaces of weighted composition operators into L^∞ , to appear in Rocky Mount. J. Math., 査読有。
<http://projecteuclid.org/euclid.rmjm>

② Shuichi Ohno, Weighted composition operators on $H^\infty \cap B_o$, Glasgow Math. J. 57(2015), no. 2, 475-480. 査読有。
 DOI:<http://dx.doi.org/10.1017/S0017089514000469>

③ Takuya Hosokawa, Kei Ji Izuchi and Shuichi Ohno, Weighted composition operators between Hilbert spaces of analytic functions in the operator norm and Hilbert-Schmidt norm topologies, J. Math. Anal. Appl. 421(2015), no. 2, 1546-1558. 査読有。
 DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.07.043

④ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi and Yuko Izuchi, Inner functions and weighted composition operators on the Hardy-Hilbert space with the unbounded weights, Ann. Funct. Anal. 6(2015), no. 2, 104-115. 査読有。
 DOI: 10.15352/afa/06-2-10

⑤ Shuichi Ohno, Composition operators related to the Dirichlet space, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin 21(2014), no. 4, 759-767. 査読有。
<http://projecteuclid.org/euclid.bbms/1414091013>

⑥ Kei Ji Izuchi and Shuichi Ohno, Topological structure of the space of weighted composition operators between different Hardy spaces, Integral Equations Operator Theory 80(2014), no. 2, 153-164. 査読有。
 DOI:10.1007/s00020-014-2142-0

⑦ Kei Ji Izuchi, Yuko Izuchi and Shuichi Ohno, Path connected components in weighted composition operators on h^∞ and H^∞ with the essential operator norm, Houston J. Math. 40(2014), no. 1, 161-187. 査読有。
<http://www.math.uh.edu/~hjm/>

⑧ Kei Ji Izuchi, Yuko Izuchi and Shuichi Ohno, Boundary vs. interior conditions associated with weighted composition operators, Central Euro. J. Math. 12(2014) no. 5, 761-777. 査読有。
 DOI:10.2478/s11533-013-0377-7

⑨ Shuichi Ohno, Weighted composition operators on the minimal Mobius invariant space, Bull. Korean Math. Soc. 51(2014), no. 4, 1187-1193. 査読有。
 DOI:<http://dx.doi.org/10.4134/BKMS.2014.51.4.1187>

⑩ Takuya Hosokawa and Michio Seto, Some remarks on operator equation $C\phi = C\phi X$, *Nihonkai Math. J.* 25(2014), no. 2, 85–91. 査読有.

<http://projecteuclid.org/euclid.nihmj>

⑪ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi and Shuichi Ohno, Interpolations for Holder's inequality, *Bull. Korean Math. Soc.* 50(2013), no. 3, 901–914. 査読有.

DOI:<http://dx.doi.org/10.4134/BKMS.2013.50.3.901>

⑫ Kei Ji Izuchi, Yuko Izuchi and Shuichi Ohno, Path connected components in weighted composition operators on h^∞ and H^∞ with the operator norm, *Trans. Amer. Math. Soc.* 365(2013), no. 7, 3593–3612. 査読有.

DOI:S 0002-9947(2012)05730-8

⑬ Kei Ji Izuchi and Yuko Izuchi, Sequential properties of the maximal ideal space of H^∞ , *Houston J. Math.* 39(2013), no. 4, 1211–1232. 査読有.

<http://www.math.uh.edu/~hjm/>

⑭ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi and Yuko Izuchi, Ranks of backward shift invariant subspaces of the Hardy space over the bidisk, *Math. Z.* 274(2013), no. 3-4, 885–903. 査読有.

DOI:10.1007/s00209-012-1100-2

⑮ Kei Ji Izuchi and Yuko Izuchi, Gleason parts and countably generated closed ideals in H^∞ , *Trans. Amer. Math. Soc.* 365(2013), no. 10, 5071–5083. 査読有.

DOI:<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-05693-0>

⑯ Kei Ji Izuchi and Yuko Izuchi, On Mortini's question concerning the level sets on $M(H^\infty)$ of a certain harmonic function, *Topology Appl.* 160(2013), no. 10, 1099–1101. 査読有.

DOI:<http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2013.04.014>

⑰ Kei Ji Izuchi and Kou Hei Izuchi, Essential norms of linear combinations of composition operators on h^∞ , *J. Korean Math. Soc.* 50(2013), no. 1, 137–159. 査読有.

DOI:10.4134/JKMS.2013.50.1.137

⑱ Kei Ji Izuchi and Yuko Izuchi, Non-analytic sets and QC-level sets in the maximal ideal space of H^∞ , *Complex Var.*

Elliptic Equ. 58(2013), no. 3, 317–332. 査読有.

DOI:10.1080/17476933.2011.586695

⑲ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi and Yuko Izuchi, Sums of weighted composition operators on COP, *Glasgow Math. J.* 55(2013), no. 1, 229–239. 査読有.

DOI:<http://dx.doi.org/10.1017/S0017089512000511>

⑳ Kei Ji Izuchi, Yuko Izuchi and Shuichi Ohno, Path connected components in the space of weighted composition operators on the disk algebra, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* 112A(2012), no. 2, 59–77. 査読有.

DOI:10.3318/PRIA.2012.112.07

㉑ Kei Ji Izuchi, Quang Dieu Nguyen and Shuichi Ohno, Composition operators induced by analytic maps to the polydisk, *Canadian J. Math.* 64(2012), no. 6, 1329–1340. 査読有.

DOI:<http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2011-073-3>

㉒ Takuya Hosokawa and Shuichi Ohno, Differences of weighted composition operators from H^∞ to Bloch space, *Taiwanese J. Math.* 16(2012), no. 6, 2093–2105. 査読有.

<http://journal.taiwanmathsoc.org.tw/index.php/TJM/index>

㉓ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi and Yuko Izuchi, Mutually prime sequences of inner functions and the ranks of subspaces over the bidisk, *Arch. Math. (Basel)* 98(2012), no. 6, 535–543. 査読有.

DOI:10.1007/s00013-012-0394-y

㉔ Kei Ji Izuchi, Kou Hei Izuchi and Yuko Izuchi, Wandering subspaces and the Beurling type theorem, III, *J. Math. Soc. Japan* 64(2012), no. 2, 627–658. 査読有.

DOI:10.2969/jmsj/06420627

㉕ Kei Ji Izuchi and Kou Hei Izuchi, Cross commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk II, *J. Korean Math. Soc.* 49(2012), no. 1, 139–151. 査読有.

DOI : 10.4134/JKMS.2012.49.1.139

㉖ Kei Ji Izuchi and Kou Hei Izuchi, Commutativity in two-variable Jordan blocks on the Hardy space, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 78(2012), 129–136. 査読有.

<http://acta.fyx.hu/acta/home.action>

[学会発表] (計 23 件)

- ① 大野修一, Weighted composition operators on the minimal Mobius invariant space, 日本数学会年会, 函数解析学分科会, 明治大学(東京都千代田区)2015年3月17日
- ② 泉池 敬司, 大野修一, Topological structure of the space of weighted composition operators between different Hardy spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析学分科会, 広島大学(広島県東広島市)2014年9月27日
- ③ 大野修一, Composition operators related to the Dirichlet space, 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析学分科会, 広島大学(広島県東広島市)2014年9月27日
- ④ 大野修一, Hankelness of composition operators, 第2回日立解析学セミナー, 茨城大学工学部(茨城県日立市)2014年7月18日
- ⑤ 細川 卓也, An operator equation of composition operators, 第2回日立解析学セミナー, 茨城大学工学部(茨城県日立市)2014年7月18日
- ⑥ 泉池 敬司, 泉池 佑子, 大野修一, Path connected components in the space of weighted composition operators on the disk algebra, 日本数学会年会, 函数解析学分科会, 学習院大学(東京都豊島区)2014年3月17日
- ⑦ 泉池 敬司, Weighted Bergman spaces embedded in the Hardy space over the bidisk 関数環研究集会, クロスパスにいた生涯学習センター(新潟県新潟市)2013年12月11日
- ⑧ 細川 卓也, Linear combinations of composition operators on H^∞ and the Bloch space, 2013年作用素論・作用素環論研究集会, お茶の水女子大(東京都文京区)2013年11月24日
- ⑨ 細川 卓也, 大野修一, Differences of weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space, 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析学分科会, 愛媛大学(愛媛県松山市)2013年9月25日
- ⑩ 泉池 敬司, Quang Dieu Nguyen, 大野修一, Composition Operators Induced by Analytic Maps to the Polydisk, 日本数学会年会, 函数解析学分科会, 京都大学(京都府京都市)2013年3月22日
- ⑪ 大野修一, Composition operators related to the Dirichlet space, 解析学セミナー, 新潟大学理学部(新潟県新潟市)2013年3月7日
- ⑫ 泉池 敬司, An example of an invariant subspace M such that $zM + wM$ is not closed, 解析学セミナー, 新潟大学理学部(新潟県新潟市)2013年3月7日
- ⑬ 細川 卓也, Eigenfunctions of power compact weighted composition operators on H^∞ , 解析学セミナー, 新潟大学理学部(新潟県新潟市)2013年3月7日
- ⑭ 大野修一, Some properties of composition operators, 日立解析学セミナー, 茨城大学工学部(茨城県日立市)2013年3月4日
- ⑮ Shuichi Ohno, Composition operators between Hardy and Dirichlet spaces, The 22nd Miyashiro Seminar Complex Analysis and Operator Theory, 日本工業大学(埼玉県宮代町)2013年1月12日
- ⑯ 細川 卓也, Some notes on composition operators on the Bloch space, 第21回宮代セミナー, 日本工業大学(埼玉県宮代町)2012年10月31日
- ⑰ 泉池 敬司, 泉池 耕平, 大野修一, Interpolations for Holder's inequality, 実解析学シンポジウム2012, 茨城大学理学部(茨城県水戸市)2012年10月28日
- ⑱ 大野修一, Topological structure of the space of weighted composition operators on H^∞ , 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析学分科会, 特別講演(招待講演), 九州大学(福岡県福岡市)2012年9月20日
- ⑲ 細川 卓也, 大野修一, Differences of weighted composition operators from the Bloch space to H^∞ , 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析学分科会, 九州大学(福岡県福岡市)2012年9月20日
- ⑳ 泉池 敬司, 大野修一, Sums of weighted composition operators on H^∞ , 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析学分科会, 九州大学(福岡県福岡市)2012年9月20日
- ㉑ Takuya Hosokawa, Differences of weighted composition operators, Functional Analysis Seminar, Helsinki University, ヘルシンキ(フィンランド)2012年8月28日
- ㉒ Shuichi Ohno, Composition operators

and the Dirichlet space, Prof. H.O. Kim
Seminar, 新潟大学理学部 (新潟県新潟市)
2012年8月24日

②③ Kei Ji, Izuchi, Ranks of invariant and
backward shift invariant subspaces of the
Hardy space over the bidisk, Topology and
Functional Analysis (招待講演), Fudan
University, 上海(中国) 2012年5月24
日.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大野 修一 (OHNO, Shuichi)
日本工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20265367

(2) 研究分担者

泉池 敬司 (IZUCHI, Kei Ji)
新潟大学・自然科学系・フェロー
研究者番号：80120963

細川 卓也 (HOSOKAWA, Takuya)
茨城大学・工学部・准教授
研究者番号：90553579

(3) 連携研究者

()

研究者番号：