様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４０１９１

研究課題名（和文）非可換調和解析における特異積分論の新たな展開ー表現論的手法と実解析的手法の融合

研究課題名（英文）New development in non-commutative harmonic analysis related to singular integrals - A fusion of representation theory and real analysis

研究代表者
河添　健（KAWAZOE, Takeshi）

慶應義塾大学・総合政策学部・教授

研究者番号：９０１５２９５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：非可換調和解析の対象として、主としてヤコビhypergroupにおける特異積分論、とくに最大関数、Littlewood-Paley関数、Lusin面積関数のH1空間における有界性とKunze-Stein現象を扱った。従来の手法はヤコビ変換とその逆変換を用いるものであったが、本研究ではアーベル変換とその逆変換を用いて行った。最大関数およびLittlewood-Paley関数に関しては、(H1,L1)有界性が得られた。Lusin面積関数に関しては修正型の面積関数の有界性が示された。またKunze-Stein現象の端点評価に関して今回の手法により別証明を与えることができた。

研究成果の概要（英文）：As a target of non-commutative harmonic analysis, mainly, on the Jacobi hyper-group, we investigate (H1,L1) boundedness of maximal functions, Littlewood-Paley's function and Lusin's area function and the Kunze-Stein phenomenon. In conventional approach, we have used the Jacobi transform and its inverse. However, in this research, we use the Abel transform and its inverse. As for maximal functions and Littlewood-Paley's function, we can obtain (H1,L1) boundedness, however, for Lusin's area function we have to modify the function to deduce (H1,L1) boundedness. Although the endpoint estimate of the Kunze-Stein phenomenon was already known, by using the present method, we can give an alternative proof.

研究分野：調和解析

キーワード：調和解析　非可換調和解析　ヤコビ変換　hypergroup　ハーディ空間　アーベル変換

１．研究開始当初の背景

平成 20 年度から平成 23 年度への 4 年間において、主としてヤコビ解析における実ハーディ空間の構成とアトム分解およびその応用として特異積分作用素の L^p 有界性、(H^1,L^1) 有界性を研究した。この時期はチュニジアを中心に Dunkl 変換やそれに類似する微分差分作用素の L^p 有界性が盛んに研究されていた時期である。実解析的にみれば Dunkl 変換は等質型空間であるので変換固有の性質を除けば、L^p 有界性の議論は既知の過程により得られる。それに対して 4 年間に渡って行ってきたヤコビ解析は非等質型空間であり、そこにおける L^p 有界性はユークリッド空間での理論の類型としては得られない。とくに (H^1,L^1) 有界性を得るには H^1 空間を定義することが必要であった。このような状況の中で最大関数・Littelwood-Paley g-関数・Lusin の面積関数の (H^1,L^1) 有界性を研究した。このような背景の中でヤコビ解析を拡張する次のステップとして Chebli-Trimeche hyper 群上の解析、さらには Cherednik 変換に対する解析、すなわち特異積分作用素の L^p 有界性、(H^1,L^1) 有界性が期待されていた。さらに付随する研究として、これらの空間における不確定性原理の拡張も盛んに研究されていた。しかし多くは等質型空間における類型であり、その手法もユークリッド空間の場合の類似であった。その中でヤコビ解析の場合に拡張を得ていたが、それを Cherednik 変換に拡張することも期待されていた。

　また非可換調和解析における特異な現象、すなわちユークリッド空間では成り立たない定理として Kunze-Stein 現象がある。この現象の応用として J-Ph. Anker は半単純リー群上の一般化された Littelwood-Paley g-関数の L^p 有界性が、通常の補間法を用いる方法より拡張できることを示していた。このことから Kunze-Stein 現象の拡張も期待されていた。

２．研究の目的

ユークリッド空間における調和解析の類型を求める研究は、表現論の発展とともに群上の非可換調和解析として盛んに研究されてきた。とくに近年、その対象は大きく広がり、hyper 群上の調和解析、Dunkl 変換、Cherednik 変換などが含まれようになってきた。これらの空間における特異積分作用素－最大関数・Littelwood-Paley g-関数・Lusin の面積関数など－の研究が期待されている。しかし筆者の知る限り、多くの成果は等質型空間におけるもので、その手法もユークリッド空間の場合と類似のものである。本質的な成果は少ない。本研究の目的は、表現論的手法および実解析的手法を再確認し、非可換調和解析における特異積分論の本質的な特異性を探るものである

　従来は実ランク１の半単純リー群上の両側 K 不変関数を対象とした解析およびその拡張としての Jacobi 解析を研究し、とくに最大関数・Littelwood-Paley g-関数・Lusin の面積関数などの有界性を調べてきた([1], [2], [3])。最大関数および Littelwood-Paley g-関数の L^p 強有界性に関しては、前述のように Kunze-Stein 現象を利用した J-Ph. Anker の結果が今のところ最良である。また河添 [2] では (H^1,L^1) 有界性を示した。今後の研究の対象としては、Kunze-Stein 現象と Lusin の面積作用素の有界性の理論が残されている。この場合、積分領域の形にユークリッド空間の場合と異なる特異性が現れるものと期待している。更には、より広い hyper 群上の最大関数・Littelwood-Paley g-関数・Lusin の面積関数などの有界性を調べ、非可換調和解析に特有な現象を探る。

　本研究で主として対象とする hyper 群あるいは変換は

(1) ヤコビ hyper 群

(2) Chebli-Trimeche hyper 群

(3) Cherednik 変換

であり、そこで構築をめざす理論は
(a) Kunze-Stein 群における特異積分
(b) 球関数の積公式の有無と特異積分
(c) 積公式の積分核が非負でない場合
(d) 多変数の場合の特異積分
(e) Fourier 積分作用素
である。(a)、(b)、(c)、(d)における特異積分としては、最大関数・Littelwood-Paley g-関数・Lusin の面積関数などを意識している。(a)の Kunze-Stein 群では L^2 と L^p の結合積さらには端点での Lorentz 空間の結合積の有界性において Kunze-Stein 現象が起こる。このような群における特異積分の L^p 評価を構築する。(b)の場合、積公式があれば球関数によって定義される一般化 Fourier 変換が結合積を積に変換する。これによりユークリッド空間の Fourier（逆）変換を用いることにより、ユークリッド空間における解析との関連が得られる。しかし積公式がない場合は独自の手法の開拓が必要となる。(a), (b)ともに半単純 Lie 群の場合の結果の拡張となる。(c)は Dunkl 変換や hyper 群などにおいて現れる現象である。移動作用素が L^p 有界になるとは限らない。通常の評価式が使えず、特異積分の L^p 評価はなかなか得ることができない。研究成果も乏しく、もっとも興味深い。(d)、(e)は(a)～(c)の成果から新たな特異積分論を構築するもので、新しい形の特異積分作用素の発見やその L^p 有界性を探るものである。

[1] T. Kawazoe, L^1 estimates for maximal functions and Riesz transform on real rank 1 semisimple, Lie groups, J. Funct. Anal., 157 (1998), 327-527.

[2] T. Kawazoe, H^1-estimates of Littlewood -Paley and Lusin functions for Jacobi analysis, Anal. Theory Appli., 25 (2009), 201- 229.

[3] T. Kawazoe, Atomic decomposition of a real Hardy space for Jacobi analysis, Adv. Pure Appl. Math., 34 (2011), 389-404

３．研究の方法

目的を遂行するために本研究で用いた手法として注目すべき点はアーベル変換の有効性である。従来、非可換調和解析はユークリッド空間におけるフーリエ解析の類型を求めるとの視点から、たとえば半単純リー群上のＫ両側不変関数を対象とした場合、球変換を定義する球関数 $\varphi_\lambda(x)$ の性質を求めることから始まった。球関数の展開公式や積公式、展開公式に現われる $C(\lambda)$ 関数の性質などを調べることによりそこでの調和解析が遂行された。この手法で当初の目的を達成することを試みたが、非常な困難を要した。とくにハーディ空間の定義や多変数への拡張を考えるときに球関数の具体的な情報が不十分である。ところでヤコビ解析のときはハーディ空間をユークリッド空間のハーディ空間のアーベル逆変換での引き戻しとして定義した([2])。さらに最大関数・Littelwood-Paley g-関数・Lusin の面積関数の (H^1,L^1) 有界性も作用素をユークリッド空間における作用素に帰着させることにより得ることができた。このことから目的を遂行するためにはアーベル変換とその逆変換が有効であると考えられる。

この手法の有効性は球関数 $\varphi_\lambda(x)$、一般には変換を定義する固有関数 $\psi_\lambda(x)$ の具体的な情報をある程度回避できる点である。一般に固有関数 $\psi_\lambda(x)$ は $[-x,x]$ に台を持つ関数 $A(x,s)$ の s 関数としてのフーリエ変換として与えられ、アーベル変換は $A(x,s)$ を積分核として定義される。アーベル変換を用いる手法ではこの $A(x,s)$ の情報を用いる。すなわち球関数を用いるよりも一回積分を取る回数が減り、各種の評価過程が簡素化される。

４．研究成果

目的に対して全体にはおおむね方向性が得られた。成果の発表は学会、セミナーなどで積極的に行ったが、論文の形では少々、時間を要している。ここではすでに発表された論

文を中心に成果発表を行う。

(ア) 関連する話題として非可換調和解析における不確定性原理を研究した。半単純リー群の場合に Miyachi 型の不確定性原理を得ていたが、Cherednik 変換に拡張することを試みた（⑥)。Cherednik 変換はルート系に付随して定義される変換であるが、その固有関数に関しては十分な情報が得られておらず、1 つの仮定を置く形で定理を導いた。ヤコビ変換や Chebli-Trimeche hyper 群では成立する仮定である。

（イ）ヤコビ解析におけるハーディ空間 H^1 のアトム分解を考えたとき、Triebel-Lizorkin空間やBesov空間の理論が必要となった([3])。 これらの空間を拡張することも重要な課題と考え、Dunkl 変換の場合にその拡張と偏微分方程式への応用を試みた(④)。等質型空間であればここでの手法は一般化できる。

（ウ）離散実ハーディ空間およびアーベル変換（ラドン変換）の研究から派生した課題として、ラドン変換の逆変換をいくつか求めてみた（②)。通常、ラドン変換は積分作用素であり、その逆変換は微分作用素である。したがって逆変換は一意ではない。離散型の場合も同様である。従来の逆変換公式は、傾きが大きな超平面でのラドン変換値に注目し、その傾きを無限大にすることによって得られた。今回、この無限大をいかにゆっくりとするか、言い換えると台が有限な関数に対して、いかに小さな傾きを使って逆変換を得ることができるかを考えてみた。フーリエ級数論との関連が注目される。また Abouelaz が中心となって研究が進められている離散ラドン変換像の解析と不確定性原理の改良にも貢献できた(③, ⑤)。

(エ) 主課題である特異積分の解析として、ヤコビ解析における Lusin の面積作用素 S_a ([2]で導入した修正型)の(H^1,L^1)有界性の評価の改善し、有界性が得られるパラメータ a の範囲を 1/3 以下から 1/2 以下へと改善した（①)。移動作用素の核評価を用いることにより評価式を改善することができた。ユークリッド空間の場合は a=1 にとれるので、まだ開きがあるが、現実にはヤコビ解析の場合、a=1/2 が最適値と感じている。これはヤコビ解析における H^1 実ハーディ空間の定義と面積作用素 Sa の定義の整合性の問題である。実際、ヤコビ解析において a=1 にするには H^1 空間の定義を強くする必要がある。このように(L^2,L^2)有界性に対しては a=1 にとれ、(H^1,L^1)有界性に対してはa=1/2 が限界であることはヤコビ解析の特長を表していると考えられる。この現象と Kunze-Stein 現象とのつながりを探ることが課題の 1 つであり、Kunze- Stein 現象の証明を改良することを試みた。

(オ) 今回の研究手法の特長はアーベル変換とその逆変換を用いることである。これにより固有関数の評価を用いる議論を、その前段階である積分核の評価を用いて行うことが可能になる。今回 Kunze-Stein 現象の証明にこれを適応してみた。とくに端点における Lorentz 空間における不等式の証明の別証明を得ることができた。セミナーおよび学会で報告を行った。

$S_{1/2}$ の(H^1,L^1)有界性と S_1 の(L^2,L^2)有界性の補間問題、Kunze-Stein 現象の多変数化（端点評価は１次元のときのみ得られている）は今後の課題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① T. Kawazoe, H^1-estimates of the Littlewood-Paley and Lusin functions for Jacobi analysis II, Anal. Theory Appl.,査読あり, vol. 32, No.1 (2016), 38-51

② T. Kawazoe, Inversion formula for the discrete Radon transform, Tokyo J. Math., **査読あり**, vol. 38 (2015), 175-191
③ A. Abouelaz, A. Ihsane, T. Kawazoe, On the Range of the Radon Transform on Zn and the Related Volberg's Uncertainty Principle, Journal of Mathematics, **査読あり**, (2015), 1-9
④ T. Kawazoe, H. Mejjaoli, Generalized Besov spaces and their applications, Tokyo J. Math., **査読あり**, vol. 35, No. 2 (2012), 297-320
⑤ A. Abouelaz, T. Kawazoe, Nazarov type uncertainty inequality for Fourier series, Scientiae Mathematicae Japonicae, **査読あり**, (2012), 177-186
⑥ R. Daher, S .L. Hammad, T.Kawazoe, N. Shimeno, Uncertainty principles for the Cherednik transform, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), **査読あり**, vol. 122, No.3 (2012), 429-436

〔学会発表〕（計 4 件）
① T. Kawazoe, A new proof of the Kunze-Stein phenomenon for Jacobi analysis, 3rd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications,
2015 年 8 月 13 日, 東京大学(東京都目黒区)
② T. Kawazoe, H^1-estimates of the Littlewood-Paley and Lusin functions for Jacobi analysis, Analysis, Geometry and Representations on Lie Groups and Homogeneous Spaces,
2014 年 12 月 9 日, Marrakech (Morocco)
③ T. Kawazoe, The discrete Radon transform and its inversion formula, 2nd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Application,
2014 年 7 月 11 日, Mudanjiang (China)
④ T. Kawazoe, Gelfand-Shilov spaces and Miyachi uncertinty principle, モロッコ数学会年会,
2012 年 6 月 25 日, Kenitra (Morocco)

６．研究組織
(1)研究代表者
河添　健（KAWAZOE, Takeshi）
慶應義塾大学・総合政策学部・教授
研究者番号：９０１５２９５９

(2)研究分担者　なし
(3)連携研究者　なし
(4)研究協力者
① 中井　英一（NAKAI, Eiichi）
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：６０２５９９００
② 宮地　昌彦（MIYACHI, Akihiko）
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号：６０１０７６９６
③ J-Ph. Anker
Universite d'Orleas, Bâtiment de Mathématiques, 教授
④ K. Koufany
Universite de Lorraine, 教授
⑤ L. Peng
北京大学・数学科学学院・教授
⑥ Lie Heping
北京大学・数学科学学院・教授
⑦ Lie Jianming
北京大学・数学科学学院・助教授
⑧ R. Daher
University Hassan II, Faculty of Sciences, 教授
⑨ A. Abouelaz
University Hassan II, Faculty of Science, 教授
⑩ H. Mejjaoli
King Faisal University, College of Science, 教授