

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 26 日現在

機関番号：32644  
研究種目：基盤研究(C)  
研究期間：2012～2014  
課題番号：24540194  
研究課題名(和文) 特異積分と関数空間の研究(偏微分方程式を視野に入れて)

研究課題名(英文) A study of singular integrals and function spaces

## 研究代表者

古谷 康雄 (Furuya, Yasuo)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：70234903

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：多重線形分数冪作用素の直積Herz空間上での有界性を証明した。さらに臨界指数を超えた場合の評価も得た。Morrey空間, Herz空間などを統一的に扱うことのできる $B_{\sigma}$ 空間を導入して, Hardy-Littlewood最大作用素, 特異積分作用素, 分数冪積分作用素がその空間上で有界であることを証明した。分数冪作用素の評価に関して, MuckenhouptとWheedenは重みつき $L_p - L_q$ 有界性を示した。AdamsはMorrey空間上での有界性を示した。我々は重みつきMorrey空間上での有界性を示した。この結果は既知の結果をすべて統合するものである。

研究成果の概要(英文)：We prove the boundedness of multilinear fractional integral operators on product of Herz spaces. We also consider supercritical cases. We introduce new function spaces called  $B_{\sigma}$  spaces which unify Morrey spaces and Herz spaces, and prove the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and fractional integral operators on this space. We obtain the boundedness of fractional integral operators on weighted Morrey space. Our result generalizes both Muckenhoupt-Wheeden inequality and Adams inequality.

研究分野：実解析学

キーワード：Morrey空間 weight Adams不等式

1. 研究開始当初の背景

$n$ 次元ユークリッド空間上での一般化された特異積分作用素  $Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$  の様々な関数空間上での有界性については、 $T1=0$  という仮定のもとで多くの研究者により多くの結果が得られて来ていた。我々はこの仮定を弱めた条件の下での有界性を得て来た。たとえば「 $T1$  がリプシツクラスに属するならば  $T$  は Hardy 空間から local Hardy 空間への有界作用素である」など。その他 Herz 型の空間、リプシツ空間、ソボレフ空間、Morrey 空間などでの有界性を示して来た。local Hardy 空間は既に知られていた空間であるが、他の空間上での有界性を調べるために導入した「local Herz-Hardy 空間」などは我々が考えたものである。その他にも応用上有効な新しい空間がみつきたい。

上記の我々の得た結果の典型的な応用例はカルデロンの交換子作用素

$Ca f(x) = \int (a(x) - a(y))/(x-y)^2 f(y)dy$  と、さらに重要な作用素である複素平面上のコーシー積分作用素

$Cf(z) = \int f(w)/(w-z)dw$  ( $dw$  は曲線上の測度) の Hardy 空間上での有界性である。

上記の結果が得られたことにより我々の研究方針であった「 $L^p$  理論で有効であった「 $T1$  定理」は Hardy 空間においても有効である。そしてその応用のために「原子」「分子」の概念の拡張が必要である」という考え方が間違っていなかったことを示している。上記の例はすべて1次元の作用素である。このタイプの作用素の  $n$ 次元版であり偏微分方程式の理論とも深い関わりのある double layer potential operator の Hardy 空間上での有界性を示したい。double layer potential operator はポアソン方程式のディリクレ問題において境界の滑らかさをぎりぎりまで弱めた(リプシツ曲面)場合の問題、流体の問題と関係があるので、偏微分方程式の研究者とも交流をはかりたい。

さらに一般化された特異積分に属する作用素である擬微分作用素についても我々の理論が適用できることが分かり「 $S^m_{0,1}$  クラスに属する擬微分作用素から作られるカルデロンの交換子型の作用素の local Hardy 空間上での有界性」を証明できた。これは Coifman-Meyer の  $L^p$  理論を Hardy 空間に拡張したものである。この結果を得るには交換子作用素のもつ平滑化効果の重要性が重要である。 $S^m_{0,1}$  クラスは話の始まりであり、もっと一般の  $S^m_{\alpha,\beta}$  のクラスに属する擬微分作用素について同様の結果を得たい。

カルデロンの交換子作用素は  $f$  だけでなく  $a$  についても線形である。このような多重(二重)線形作用素は非線形作用素を線形な作用素の摂動と考えたとき自然に出てくるもので、Bony, Coifman-Meyer の研究など歴史があるが、近年2重線形ヒルベルト変換の重要性の再認識から、新しい視点での研究

が始まっている。 $L^p$  以外の関数空間での有界性を考えたい。

2. 研究の目的

特異積分作用素(擬微分作用素も含めて)の有界性を、Hardy 空間を中心として様々な空間上で考える。多くの有用な作用素がその範疇に入る理論を作る。多重線形特異積分作用素という、非線形問題との関連で近年重要性が認識され始めた作用素の様々な空間上での有界性を示す。同様に重みつき評価も考える。特に今までの研究で重要性が分かっていた Morrey 空間上での作用素の性質を調べる。

3. 研究の方法

本研究では、研究課題を具体化した数本のテーマに沿って、研究代表者、研究分担者とその研究協力者の個別研究の推進とともに、分担者間の直接の研究交流を最も重要して進めた。そのために、いくつかの研究テーマによる研究分担者会議と研究集会を開催し、基盤研究を推進した。

代表者が主催した研究集会は3つ。調和解析セミナー、東京大学、2012年12月。調和解析セミナー、日本女子大学、2013年12月。調和解析セミナー、山形大学、2014年12月。科研費により補助をした研究集会は3つ。実解析学シンポジウム、茨城大学、2012年10月。実解析学シンポジウム、岡山大学、2012年10月。実解析学シンポジウム、富山大学、2012年10月。さらに調和解析駒場セミナーの共同主催者として月一度のセミナーを開催した。

4. 研究成果

多重線形分数作用素の Herz 空間の直積空間上での有界性を証明した。さらに臨界指数を超えた場合の評価も得た。Morrey 空間、Herz 空間などを統一的に扱うことのできる  $B_{\sigma}$  空間を導入して、特異積分作用素、Hardy-Littlewood maximal operator, 分数積分作用素がその空間上で有界であることを証明した。またリトルウッド・ペリーの理論がこの空間の上で成り立つことも示した。分数作用素の Morrey 空間上での重みつき評価を得た。これは Muckenhoupt と Wheeden の不等式, Adams の不等式の両方を統合する不等式である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

E. Gunawan, E. Nakai and Y. Sawano, Characterizations for the generalized fractional integral operators on Morrey spaces. Math. Inequal. Appl. , 査読有, Vol. 17, 2014, pp.761-777

T. Iida, Y. Sawano, and H. Tanaka, Atomic decomposition for Morrey spaces. Z. Anal. Anwend. , 査読有, Vol. 33, 2014, pp.149-170

T. Matsuyama, Perturbed Besov spaces by a short-range type potential in an exterior domain, Fourier Analysis, Trends in Math. 2014, 査読有, 2014, pp.285-309

T. Matsuyama and M. Ruzhansky, Scattering for strictly hyperbolic systems with time-dependent coefficients, Math. Nachr, 査読有, Vol. 286, 2013, pp. 1191-1207

T. Izumi, Y. Komori-Furuya and E. Sato, The fractional integral operators related to the Adams inequality on weighted Morrey spaces, Sci. Math. Japonicae, 査読有, 2013, Article ID 2013-55

Y. Komori-Furuya, Multilinear fractional integral operators on Herz spaces, Australian J. of Math. Anal. and Appl., 査読有, Vol. 10, 2013, pp.1-12

Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, E. Nakai and Y. Sawano, Integral operators on  $B_{\sigma}$  Morrey Campanato spaces, Rev. Mat. Complut, 査読有, Vol. 26-1, 2013, pp.1-32

Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, E. Nakai and Y. Sawano, Applications of Littlewood-Paley theory for  $B_{\sigma}$ -Morrey spaces to the boundedness of integral operators, J. of Function Spaces and Appl., 査読有, 2013, Article ID 859402.

Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, A note on generalized fractional integral operators on Orlicz-Morrey spaces, Potential Anal., 査読有, Vol. 36, 2012, pp. 517-556

Y. Mizuta, E. Nakai, Y. Sawano and T. Shimomura, Gagliardo-Nirenberg inequality for generalized Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, Arch. Math. (Basel), 査読有, Vol. 98, 2012, pp. 253-263

M. Izuki and Y. Sawano, Atomic decompositions for the weighted

Besov and Triebel-Lizorkin spaces, Math. Nachr., 査読有, Vol. 285, 2012, pp.103-126

E. Nakai and Y. Sawano, Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces, 査読有, J. Funct. Anal. vol. 262, 2012, pp. 3665-3748

T. Matsuyama, Representation formula of the resolvent for wave equation with a potential outside the convex obstacle, Progress in Mathematics, 査読有, Vol. 301, 2012, pp. 213-225

〔学会発表〕(計 4 件)

古谷康雄, コーシー積分-実解析と偏微分方程式の接点-, 日本数学会秋季総合分科会企画特別講演, 広島大学, 9月27日(2014).

Yasuo Furuya, Endpoint estimates for multilinear fractional integral operators, 調和解析と非線形偏微分方程式, 京都大学数理解析研究所, 6月30日(2014).

古谷康雄, Bilinear Hilbert 変換の有界性, 調和解析セミナー, 日本女子大学, 12月25日(2013).

古谷康雄, 複数の直線上に singularity をもつ双線形フーリエマルチプライヤーについて, 調和解析セミナー, 東京大学, 12月25日(2012).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1)研究代表者

古谷 康雄 (FURUYA, Yasuo)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：70234903

(2)研究分担者

澤野 嘉宏 (SAWANO, Yoshihiro)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：40532635

松山 登喜夫 (MATSYAMA, Tokio)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：70249712

(3)連携研究者

( )

研究者番号：