

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 10 月 12 日現在

機関番号：32702

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540195

研究課題名(和文) 可測力学系と位相力学系との交流理論と非可換力学系の作用素論的基礎研究

研究課題名(英文) Research for the interplay between measurable dynamical systems and topological dynamical systems through the basic method of operator

研究代表者

長 宗雄 (Cho, Muneo)

神奈川大学・044・教授

研究者番号：10091620

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：可測力学系と位相力学系との作用素論的基礎研究で、バナッハ空間上への (\mathcal{L}^1) の既約表現(存在その他)の研究を行い、 (\mathcal{L}^1) のイデアルの構造問題において (\mathcal{L}^1) が Hermite Banach algebra であることを示した。この結果を「Note on the structure of non-commutative \mathcal{L} algebras associated with topological dynamical system」としてまとめ、広く配布した。

研究成果の概要(英文)：On research for the interplay between measurable dynamical systems and topological dynamical systems through the basic method of operator theory, we have studied irreducible representations to Banach spaces (existence and etc.) and we showed that (\mathcal{L}^1) is a Hermite algebra in the ideal structure problem of (\mathcal{L}^1) . And we published a note with title "Note on the structure of non-commutative \mathcal{L} algebras associated with topological dynamical system".

研究分野：関数解析学

キーワード：Hilbert space Operator Spectrum C*-algebra Dynamical system

1. 研究開始当初の背景

C^* -環の群作用の解析のために、その重要手段として C^* -クロス積があるが、その構成は最初群作用による twisted convolution による L^1 -クロス積をつくり、その C^* -envelope として作成するものであった。そして C^* -環の研究者の中には、これを非可換フーリエ解析とみなす人達もいる。しかしこれには元々のフーリエ解析の理論から見て、不都合な面がある。フーリエ変換は元々局所コンパクト可換群 G と、その共役群 F について $L^1(G)$ から $C_0(F)$ への写像であったのに対して、 C^* -クロス積のみでは $L^1(G)$ の非可換部分が不在になるからである。このような背景のもとに我々は L^1 -クロス積、 C^* -クロス積の組の解析が本来のフーリエ解析の非可換化（非可換調和解析）の形であろうと考える。

2. 研究の目的

$\ell^1(\)$ において単純性と極小性の同値が成立するかを解明すること。新発見の発見に努める。そして閉イデアルの C^* -ノルムの閉包がまた proper になるのか？非周期点、周期点の振る舞いの $\ell^1(\)$ への反映について研究する。そして、荒木-Woods の自由気体のボーズ濃縮の結果を非可換力学系によって記述すること。さらに m -isometric 作用素の spectral properties について研究を行う。特に、この作用素は Weyl の定理が成立するのか？またこの作用素は Bishop's property を持つかを解明する。また、 m が偶数であれば可逆な m -isometry は $(m-1)$ -isometry となることが知られているので、 m が奇数に対して可逆な m -isometry を研究する。

3. 研究の方法

本研究は国の内外を問わず、この問題に関心があり、研究業績のある研究者と対面し、意見交換をしながら研究を進めることが最良の方法であるので、3年間の研究期間において、6回の国内出張および5回の外国出張を

行う。さらに6名の海外の研究者を招聘する。この方法で研究を行う。

4. 研究成果

2012年度から2014年度までの期間で研究を進めた「可測力学系と位相力学系との交流理論と非可換力学系の作用素論的基礎研究」について当初の計画をおおむね達成することができた。まず次の論文において $C(X)$ の可換子環のスペクトルの構造を完全に決定した。これは「Maximal abelian subalgebras and projections in two Banach algebras associated with a topological dynamical system, *Studia Mathematica*, 208 (2012), 47-75, M. de Jeu (Leiden Univ.)」との共著論文である。次に汎関数が positive である性質を持つ Banach* - 環は自動的にその *-作用とノルムで C^* -環になるか？との問題について推定通りの結果を得て次の論文に発表した。これは「A characterization of C^* -algebras through positivity of functional, *Ann. of Functional Analysis* (2013), 61-63, M. de Jeu」との共著論文である。この結果はその帰結として C^* -環の involution はただ一つ（一意にきまる）しかないことを示している。また次の課題としていた非可換の Spectral synthesis の問題の定式化と、その成立する場合（周期点を持たない場合に限る）についての結果を次の論文に発表した。「Non-commutative spectral synthesis for the involutive Banach algebra associated with a topological dynamical system, *Banach J. of Math. Analysis*, 2013, 103-135, M. de Jeu」との共著論文である。また、前年度来日できなかった、イタリア・パレルモ大学の A. Pietro 教授と、スペイン・サンタンデル大学の M. Gonzales 教授には来日いただき、共同研究を進めることができた。そのときに、進めた共同研究は論文「The perturbation classes

problem for closed operators」としてまとめ、出版待ちである。

Banach 環の表現の問題は初期の段階（環論よりの移動）では単純に純代数的にのみ考えられてきたが、ノルムを導入したバナッハ環においてはそれだけでは済まされないのが当然である。しかしその中心になるべき既約表現については（特にバナッハ $*$ -環）これまではヒルベルト空間上への位相的な既約表現のみが議論されていた。ところが他方では ideal の中心的存在の Primitive ideal は依然として代数的な既約表現の核として定義されており、その間のギャップについてはこれまで何も研究されていない。両者が一致する C^* -環論では問題はないが、バナッハ環においては、これは基本的に重大な問題である。本研究では課題の L^1 -環の既約表現について研究を進めた。有限次元の既約表現については両者が一致することは自明な結果であるから、問題は無限次元の表現の場合である。従って L^1 -環が何時無限次元の表現（ヒルベルト空間とは限らない）を持つかが課題になるが、有限次元の表現しか持たないのは底空間 X が周期点のみから成り立つ時であることを示した。

また、作用素論では、ヒルベルト空間で定義される $*$ -paranormal 作用素をバナッハ空間上の作用素に拡張することを試みた。それによって n -paranormal 作用素間の相互関係や共通部分についても考察し、〔雑誌論文〕の 3 の論文において、これらを明らかにした。さらに invariant subspace の存在についての研究を行い、〔雑誌論文〕の 9 の論文においてヒルベルト空間上の ExB-operator についてこれを解決した。さらに 5 の論文においては m -isometry 作用素の研究を行い、 m が偶数の場合には可逆な m -isometry は一般には $(m-1)$ -isometry とならないことを示すことができた。さらに power bounded な m -isometry 作用素は isometry であることを示し、さらに m -isometry 作用素 T は $_{m-1}(T)$ が必ず可逆でないことを示した。

また、これまでの研究成果を「Note on the structure of non-commutative L^1 -algebras associated with topological dynamical system」の題名でまとめ、広く配布した。このノートの内容は、 C^* -環の群作用の解析のためには、その重要な手段として C^* -クロス積があるが、その構成は最初に群作用による twisted convolution による L^1 -クロス積をつくり、その後その C^* -envelope として作成するものであった。そして C^* -環の研究者の中には、これを非可換フーリエ解析とみなす人達もいる。しかしこれには元々のフーリエ解析の理論から見て不都合な面がある。それは、フーリエ変換は元々局所コンパクト可換群 G と、その共役群 F について $L^1(G)$ から $C_0(F)$ への写像であったのに対して、 C^* -クロス積のみでは $L^1(G)$ の非可換部分が不在になるからである。このような背景のもとに我々は L^1 -クロス積、 C^* -クロス積の組の解析が本来のフーリエ解析の非可換化（非可換調和解析）の形であろうと考える。しかし L^1 -クロス積はここ 50 年近く、ほとんどの研究者にとっては、単に C^* -クロス積の構成に至る単なる経路と見做され、明確な論理体系もなく、これについての研究も皆無に近い状況にある。このため一般論にいたっては、いまだ問題としてとらえることすらない状況にある。そのため、その主張のモデルとして位相力学系 $\Sigma = (X; \Sigma)$ (X はコンパクト空間、 Σ はその位相同型) に付随する L^1 -クロス積、 $L^1(\Sigma)$ (非可換 L^1 -環) の解析を目標にしたノートを作成した。ここで一番簡単な X が 1 点になった場合には Z を整数全体、 T をトーラスとすれば、 $L^1(Z)$ と $C(T)$ が現れ、前者から後者への embedding map が、古典的な整数群 Z 上のフーリエ変換になっていることは（通常見落されている）本ノートの重要な部分である。本篇の議論の特徴としては通常の C^* -論と異なって、自己共役ではない閉イデアルの存在が一つ

の主要点である。また、 $\ell^1(\Sigma)$ は、その表現においても C^* -環、ヒルベルト空間を貫く L^2 -理論に馴染まず、 L^1 -理論を主体に進めなければならないことを、最後の既約表現の節で示し、その帰結として $\ell^1(\Sigma)$ が Hermite algebra であることを示した。

〔雑誌論文〕の 1 においては、アイルランドから R. Harte 教授および チェコから V. Muller 教授に来日いただき、バナッハ空間上の作用素 T に対して α -range $R^\alpha(T)$ により $\text{co}(T) = \bigcap_\alpha R^\alpha(T)$: coeur alg'ebrique of T を作るとき、 T は $\text{co}(T) \rightarrow \text{co}(T)$ 上への写像となる。この空間によって、作用素 T の local spectrum が定義され、 T の local spectral theory を展開した。論文 2 においてはヒルベルト空間上の polynomially $*$ -paranormal 作用素は isoloid であり、その essential approximate point spectrum はスペクトル写像定理が成り立つことを示した。論文 4 においてはバナッハ空間上の可換な作用素の Taylor exactness について研究した。特に、middle non singular の条件について、M. Gonzalez の結果により、核空間と値域との関係を求めた。論文 6 においてはメキシコより G. Kantun-Montiel 教授に来日いただき、バナッハ空間上の作用素 A が invertible along T とは、 $BT=AB, R(B)=R(T), N(B)=N(T)$ を満たす作用素 B が存在するときを言う。これは generalized inverse の作用素版である。ここでは T が projection であるときには $R(AT) = R(P)$ ならば $AP=PA$ となることを示した。さらに、 A の spectral set が 0 を含まないときには A は invertible along $P_\lambda(A)$ であることを示した。ただし、 $P_\lambda(A) = 1/(2\pi i) \int (z-A)^{-1} dz$ である。論文 7 ではバナッハ空間 X 上の $*$ - n -paranormal 作用素 T は isoloid であり、異なる固有値に対する固有空間は直行することを示した。さらにバナッハ空間 X の共役空間 X^* が uniformly

convex のときには $(T-z)_{X_n} \rightarrow 0$ ならば $(T-z)_{f_n}^* \rightarrow 0$ となることを示した。論文 8 においては中国から李春吉教授および韓国から M. R. Lee 教授に来日いただき、共同研究によって cubically hyponormal weighted shift は、最初の二つの weights が等しいならば flat であることを示した。さらに almost-cubically hyponormal であるが cubically hyponormal でない例を示した。論文 10 においては中国から張玲玲教授に来日いただき、大和田教授との共同研究によって、ノルム空間での三角不等式について考察し、ヒルベルト空間では逆の不等式を成立させる条件について研究した。さらに strictly convex Banach 空間でのこの不等式について研究した。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 10 件)

1. M. Cho, R. Harte and V. Muller, Transfinite ranges and the local spectrum, J. Math. Anal. Appl. 398 (2013), 403-408,
2. M. Cho, A. Uchiyama and K. Tanahashi, On polynomially $*$ -paranormal operators, Functional Analysis, Approximation and Computation, **5:2** (2013), 11-16
3. M. Cho and S. Ota, On $*$ - n -paranormal operators, Journal of Mathematics Research, 5(2013), 107-113
4. M. Cho and R. Harte, Taylor exactness, SVEP and spectral mapping theorems, J. Math. Forum, 8(2013), 1493-1501
5. M. Cho, S. Ota and K. Tanahashi, Invertible weighted shift operators which are m -isometries, Proc. Amer. Math. Soc. 141(2013), 4241-4247
6. M. Cho and Gabriel Kantun-Montiel, Commuting outer inverses, Advances in Linear Algebra & Matrix Theory, 3(2013), 69-72

7. M. Cho and K. Tanahashi, On $*-n$ -paranormal operators on Banach spaces, J. Math. Comput. Sci. 4(2014), 1-9

8. Chunji Li, M. Cho and M. R. Lee, A note on cubically hyponormal weighted shifts, Bull. Korean Math. Soc. **51** (2014), 1031-1040

9. M. Cho, Invariant subspace problem for ExB-operators, Functional Analysis, Approximation and Computation, **6:2** (2014), 61-64

10. L. Zhang, M. Cho and T. Ohwada, Reverses of the triangle inequalities in inner product spaces, Math. Inequalities Applications, **17** (2014), 539-555

〔学会発表〕(計 1 件)

講演題名 : On m -isometric operators

2013 年 6 月 11 日 スペイン・CastroUrdiales
での国際研究集会

研究集会名 : Operators on Banach spaces

〔図書〕(計 1 件)

冊子 : 48 ページ (英語) 2015 年 4 月発行
冊子題名 : Note on the structure of non-commutative ℓ^1 -algebras associated with topological dynamical system

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

6 . 研究組織

研究代表者 : 長 宗雄 (CHO Muneo)
神奈川大学・理学部・教授

研究者番号 : 1009162