

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 17 日現在

機関番号：34412

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540197

研究課題名(和文) ウェーブレット解析の応用における数学的基礎付けと関連する諸問題

研究課題名(英文) Mathematical Reasoning in application of wavelet analysis and related problems

研究代表者

萬代 武史 (Mandai, Takeshi)

大阪電気通信大学・工学部・教授

研究者番号：10181843

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：ウェーブレット解析、特にその中心にあるウェーブレット変換に関して、応用場面で現れる数学的問題のいくつかについて考察を加え、応用の基盤となる性質について、ある程度明確にすることができた。特に、ウェーブレット関数の(分数べき)ヒルベルト変換に対応するスケーリング関数の変換について、明らかにすることができた。数学的にもメイエウェーブレットの特性の1つが明らかになった。この結果はブラインド信号源分離(複数の原信号が混じった信号のみが観測できる際に、それら観測信号から原信号の情報を得るといった問題)の新たな手法にも結び付いた。

研究成果の概要(英文)：We considered several mathematical problems, which occur when we apply wavelet analysis, especially (continuous or discrete) wavelet transforms, and we make clear the basic properties of the transforms which would be useful in applications. Especially, we found the transform of scaling functions corresponding to the (fractional) Hilbert transforms of wavelet functions. By this, an important property of Meyer wavelets is made mathematically clear. This result could also be applied to blind source separation (the problem to extract information about original signals from observed signals which are unknown mixtures of the original signals).

研究分野：ウェーブレット解析

キーワード：ウェーブレット スケーリング関数 ヒルベルト変換 信号源分離 解析信号 瞬間振幅

1. 研究開始当初の背景

ウェーブレット解析の数学的な基礎理論はほぼ完成していると言ってよく、多くの応用分野で様々な使われ方をしているが、実際に使われている場面では、うまく行く数学的根拠の薄い場合が少なくない。こういった事柄について数学的な観点から検討することによって、応用分野でも数学分野でも理解が深まることが期待された。

2. 研究の目的

時間による周波数成分の変化を解析する窓フーリエ変換に基づく時間周波数解析は、さまざまな方面で応用がなされている。独立変数が時間でなくとも応用でき、特に画像などの2次元データにも応用されている。ウェーブレット変換に基づくウェーブレット解析は、厳密には時間スケール解析と呼ぶべきものであるが、スケール(の逆数)は周波数と密接な関係があり、少なくとも応用上は、時間周波数解析の一部とみなされている。研究代表者らは今まで、ウェーブレット解析を核として、主にその応用における数学的側面の基礎づけなどを中心に、ウェーブレット変換を通じた線形システムのシステム同定や信号源分離(Blind Source Separation)の問題などを、考察してきた。いろいろな応用場面では、それぞれの目的に応じて、ターゲットとするデータに対してうまくいくような工夫が行われているが、「なぜそれでうまくいくのか」の理論的考察は不十分なことがほとんどである。本研究では、各応用がターゲットとするデータのみでなく、より広いデータに対する実験的なシミュレーションなども行って、うまくいく理由(からくり)の解明を目指した。

特に以下の点について、重点的に考察した。(以下では、応用を意識して信号という言葉を使うが、数学的には関数または数列(離散化した場合)である。)

(1) 定常ウェーブレット変換などの冗長な変換の例外はあるが、通常の冗長でない離散ウェーブレット変換は、平行移動不変性を持たない。すなわち、離散ウェーブレット変換は元の信号 f を近似と詳細に分解するステップが基本となるが、 f を平行移動したとき、その近似と詳細への分解のされ方が大きく変化するのである。これは応用によっては大きな欠点となりうる。そのため、応用上の解決法がいろいろ試みられている。それらのよく知られた応用上の解決法に対して、その数学的からくりを明らかにしたい。特に、メイエウェーブレットの場合にウェーブレット関数のヒルベルト変換がスケーリング関数の $1/2$ 平行移動と対応するという不思議の背後にあるからくりを明らかにしたい。

(2) 信号の周波数の中心と幅について、普通は正負の周波数を区別して考えるため、実信号については常に中心は 0 となる。しかし、応用上知りたい「中心周波数」はこれではな

い。信号処理など応用上の必要性から、正の周波数だけを考えて中心や幅(片側中心、片側幅と呼ぶ)を考えることも多いが、例えば、関数 $f(x)$ とそのフーリエ変換 $f(x)$ の幅の積がある程度以上小さくはなれないという不確定性原理が、片側幅を考えた時にどうなるか等は、いまだ明確ではないし、複素信号の場合はほとんど考察されていない。我々は複素信号も込めた数学的な基礎づけを今までもある程度考察してきたが、この考察をさらに進めるとともに、これを利用して、ウェーブレット変換に関する不確定性原理を考察したい。また、関連する問題として、ウェーブレット解析におけるスケールと周波数との正確な対応付けの問題がある。スケール a の逆数が周波数に比例すると考えるのは自然なことであり、応用場面では $1/a$ が周波数と比例すると定めてスケールを周波数表示するのが普通になっているが、実は比例定数の決め方についてはいまだに明確ではない面がある。この点について、従来より踏み込んだ理論的な基礎づけを与えたい。

(3) 複数の原信号が混じった観測信号(混じり方の違う複数の観測信号)から原信号の数や原信号そのものを復元するという信号源分離の問題は、様々な手法が考えられている。我々は、ブラインド信号源分離(原信号に対するアプリオリ情報がない場合)について、時間周波数解析(ウェーブレット解析を含む)に基づいた手法の原理について考察を行ってきているが、いまだ不十分な点がある。これらの問題についてさらなる考察を行いたい。

(4) 虚部が実部のヒルベルト変換になっている信号を解析信号と言い、信号の負の周波数部分を取り除いたものになっているので、信号処理の世界ではよく使われている。連続ウェーブレット変換とも大変相性の良い概念である。しかし、「実信号からそのヒルベルト変換を虚部として解析的信号を作り、その絶対値を考えると元の信号のエンベロープ(数学的な意味の包絡線ではなく、大まかな変動を抜き出したもの)が求まる」という信号処理の世界でよく知られた知識は、いまだ完全な数学的裏付けがない。特に、エンベロープとは言い難いものが出てくる場合があり、元の信号のどういう要素が大きく影響して、それから作った解析信号の絶対値がエンベロープと呼べるものになるのかはいまだ明らかではない。本研究ではその秘密に迫り、ウェーブレット変換に応用するための数学的基礎づけを探る。

3. 研究の方法

(1) 研究分担者との研究分担など

研究代表者(萬代)が、当面集中して研究すべき点・広く情報収集すべき点等を整理して提示し、共同研究者(研究分担者、連携研究者)が問題解決のために、それぞれの専門分野に関連する部分を受け持ち、各研究者の

自主性を尊重しつつ研究を進める。

以上の各人の成果等をもとに、適宜、萬代が全体の総括を行い、次に進むべき方向を考え、各人に提示する。共同研究者とは定期的にセミナーを行う。

(2) 研究連絡・情報収集

他大学などの研究者との交流は、本研究にとっても不可欠である。各種の研究会（シンポジウム、研究集会、集中セミナー、ワークショップ等）においては、日進月歩の研究成果の発表が行なわれている。これらに積極的に参加し、研究成果の発表討論や情報収集を行う。この際には、共同研究者との情報交換なども同時に積極的に行う。また、個々の研究者と個別に討論・情報交換を行なうことで研究を促進する。このために、調査・研究旅費を使用する。又、外国旅費を使用して、今までの成果の一部を発表し、各国の研究者とアイデアの交換を行って今後の研究の参考にしたい。このために海外旅費を使用する。

(3) 文献調査

各共同研究者（研究代表者を含む）が、研究に必要な文献を、設備備品費や消耗品費により図書を購入する、図書館経由で複写したものを入手する、調査・研究旅費により他大学へ文献調査に赴く、などの方法で集める。

4. 研究成果

(1) メイエ(Meyer)ウェーブレットの場合、スケーリング関数を $1/2$ だけ平行移動したもののから MRA の理論に基づいて作ったウェーブレット関数は、元のウェーブレット関数のヒルベルト変換になる。これは一見大変不思議なことである。この不思議さを解明するため、一般のスケーリング関数とウェーブレット関数のペアにおいて、平行移動の一種の変形であるユニタリ作用素とヒルベルト変換の拡張であるユニタリ作用素（分数べきヒルベルト変換）の 2 つを定義し、それぞれをスケーリング関数とウェーブレット関数に作用させたものが、MRA 理論に基づく自然な対応をなすことを証明することができた。また、これらの作用素の定義により、 $1/2$ 以外の平行移動に関しても、スケーリング関数からウェーブレット関数への対応が明らかになった。また、これらの作用素を作用させたものの局在性が重要な問題となったが、これらの局在性はウェーブレット関数のゼロモーメント条件と深くかかわることが明らかとなり、ゼロモーメント条件のもとで局在性が保たれることが証明できた。

これらの結果を双直交ウェーブレットの場合に拡張し、やはりウェーブレット関数の分数べきヒルベルト変換に対応するスケーリング関数が上記ユニタリ作用素で得られることを明確にした。また、上の結果を具体的な双直交ウェーブレットに対して適用し、N 分木離散ウェーブレット変換に応用した。実際の応用ではフィルタ係数が重要であるが、上記で得られたスケーリング関数やウエ

ーブレット関数に対応したフィルタ係数を理論的に計算し、連携研究者である守本晃氏の研究室の大学院生の応援も一部得て、シミュレーションも行った。

(2) ウェーブレット変換に関する不確定性原理について、特にスケールパラメータに関わる不確定性原理については、関数（信号）のフーリエ変換において、正負の周波数を統合した片側幅に関する不確定性原理が重要なキーとなることが分かった。しかし、この場合のフーリエ変換の不確定性原理の正しい下限については、いまだ不明な点がある。すでに発表されている結果の証明に大きな穴があり、この点について解明することが今後の大きな課題であり、残念ながら停滞している。

(3) 信号源分離については、時間スケール情報行列を用い、ガウスの消去法の原理を使って信号源を一つずつ減らしていく手法を考案した。数値シミュレーションにより、従来の方法より多くの信号源に対して有効であることが分かった。

信号源（現在は画像を考えている）の単純な線形和ではなく、平行移動したものの線形和で平行移動の大きさも未知の場合 (spatio-temporal mixing model) については、連続マルチウェーブレット変換の相互相関を用いた手法を考案した。具体的な画像でシミュレーションを行い、有効性を確認した。

また、(1) で述べた双直交の場合のスケーリング関数とウェーブレット関数のヒルベルトペアを元にした N 分木離散ウェーブレット変換を使って、平行移動を含んだ混合画像の場合について、具体的な画像でシミュレーションを行った。

(4) 一般の信号の瞬間振幅についての新たな不等式が得られ、周波数帯が狭い場合に瞬間振幅（解析信号の絶対値）が元の信号の粗い変動を表すことの数学的基礎づけの 1 つが得られた。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 10 件)

Takeshi Mandai, An inequality on instantaneous amplitudes, INFORMATION - An International Interdisciplinary Journal, Special Issue for Information'2015, 査読有, 2016, to appear (accepted).

Takeshi Mandai, Orthonormal scaling functions generating fractional Hilbert transforms of an orthonormal wavelet, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, 2016, to appear (accepted).

R.Ashino - T.Mandai - A.Morimoto, An estimation method of shift parameters in image separation

problem, in Current Trends in Analysis and Its Applications: Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakow 2013, Mityushev, Vladimir, Ruzhansky, Michael V. (Eds.), Birkhauser Mathematics, 査読有, 2015, 467-473. DOI 10.1007/978-3-319-12577-0_52

A.Morimoto - R.Ashino - K.Ikebe - M.Tatsumi - T.Mandai, Fractional Hilbert transforms of biorthogonal wavelets, in the Proceedings of 12th International Conference on Information Technology: New Generations, ITNG 2015, 査読有, 2015, 347-352. DOI 10.1109/ITNG.2015.62

A.Morimoto - R.Ashino - T.Mandai, Image separation using N-tree wavelet transforms, in the Proceedings of 2015 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, Guangzhou, 査読有, 2015, 93-98. DOI 10.1109/ICWAPR.2015.7295932

Ryuichi Ashino - Takeshi Mandai - Akira Morimoto, Scaling functions generating fractional Hilbert transforms of a wavelet function, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 67:3, 2015, 1275-1294. DOI 10.2969/jmsj/06731275

A.Morimoto - R.Ashino - K.Ikebe - T.Mandai - M.Tatsumi, Filter coefficients of the fractional Hilbert transforms of biorthogonal wavelets, Proceedings of 2014 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, 査読有, 2014, 134 - 139. DOI:10.1109/ICWAPR.2014.6961304

守本 晃 - 芦野 隆一 - 池邊 和馬 - 辰巳 基 - 萬代 武史, N分木離散ウェーブレット変換について, 査読無, 数理解析研究所講究録 1928, 2014, 1-26, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodokokyuroku/contents/1928.html>

Ryuichi Ashino - Takeshi Mandai - Akira Morimoto, Multistage blind source separations by wavelet analysis, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 査読有, 12:4, 2014, 1460004. DOI 10.1142/S0219691314600042

Ryuichi Ashino - Shusuke Kataoka - Takeshi Mandai - Akira Morimoto, Blind image source separation by wavelet analysis, Applicable Analysis: An International Journal, 査読有, 91:4, 2012, 617-644. DOI 10.1080/00036811.2011.616497

Takeshi Mandai, An inequality on instantaneous amplitudes, The Seventh International Conference on Information, 2015.11.25-28, Taipei (Taiwan).

Akira Morimoto - Ryuichi Ashino - Takeshi Mandai, Image separation using N-tree wavelet transforms, The 2015 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, 2015.06.12-15, Guangzhou China).

Akira Morimoto - Ryuichi Ashino - Kazuma Ikebe - Motoi Tatsumi - Takeshi Mandai, Fractional Hilbert Transforms of Biorthogonal Wavelets, The 12th International Conference on Information Technology: New Generations, ITNG 2015, 2015.04.13-15, Las Vegas, Nevada (USA).

T.Mandai, Orthonormal scaling functions generating fractional Hilbert transforms of an orthonormal wavelet, RIMS Symposium "Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations", 2014.07.01, RIMS, Kyoto University (Kyoto).

萬代 武史 - 芦野 隆一 - 守本 晃, ウェーブレット関数のヒルベルト変換を生み出すスケーリング関数に関するユニタリ作用素の局在性について, 日本応用数理学会 2014 年度研究部会連合発表会, 2014.03.20, 京都大学 (京都) .

守本 晃 - 芦野 隆一 - 萬代 武史, 連続マルチウェーブレット変換の相関関数を用いた画像分離法, 日本応用数理学会 2014 年度研究部会連合発表会, 2014.03.20, 京都大学 (京都) .

守本 晃 - 芦野 隆一 - 萬代 武史, マルチウェーブレット変換による平行移動を含んだ混合画像の分離法, 日本応用数理学会 2013 年度年会, 2013.09.11, アクロス福岡 (福岡) .

R.Ashino - T.Mandai - A.Morimoto, An estimation method of shift parameters in image separation problem, the 9th International ISAAC Congress, 2013.08.06, Krakow (Poland).

Takeshi Mandai, A scaling function generating the Hilbert transform of a wavelet function, Taiwan-Japan Joint Conference on PDE and Analysis, 2012.12.26, Taipei (Taiwan).

守本 晃 - 芦野 隆一 - 萬代 武史, ガウスの消去法を用いた信号源縮減について, 日本応用数理学会 2012 年度年会, 2012.08.31, 稚内全日空ホテル (北海道).

(1)研究代表者

萬代 武史 (MANDAI, Takeshi)
大阪電気通信大学・工学部・教授
研究者番号：10181843

(2)研究分担者

芦野 隆一 (ASHINO, Ryuichi)
大阪教育大学・教育学部・教授
研究者番号：80249490

(3)連携研究者

守本 晃 (MORIMOTO, Akira)
大阪教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：50239688