

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 27 日現在

機関番号：10103

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540201

研究課題名(和文)非線形移流拡散方程式系に対する爆発解と時間大域解に関する研究

研究課題名(英文)Study on the blowup solution and time global solution for the nonlinear drift-diffusion equation system

研究代表者

黒木場 正城 (KUROKIBA, MASAKI)

室蘭工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60291837

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は、単成分でない移流拡散方程式系の解の構造、爆発条件について研究を行った。最初に空間2次元2成分系の初期値境界値問題に取り組み、2つの解が同時に爆発するときそれぞれ同成分粒子の集団に分離することを証明した。そして問題を多成分系の初期値問題に発展させ、重み付L2関数空間上で有限時間爆発解の爆発条件を示した。さらに同問題に対し解空間を拡張して、時間局所可解性の証明を行った。また空間高次元多成分系の初期値問題に対して、情報理論で扱われるShannonエントロピー不等式の連続版を考案し、解の爆発条件を導いた。

研究成果の概要(英文)：We have considered a drift-diffusion system which is not one component. At first, we have studied a drift-diffusion system on bounded domain in two space dimension. Then we have performed the blowup analysis such as the formation of collapses and collapse mass separations. And we have discussed the blow-up conditions for multicomponent drift-diffusion model in two space dimension and higher dimensions, respectively. Moreover We have shown that the local solvability of the solution in the weighted L2 spaces and the extension of the functional space for the solution in two space dimension. In higher dimension case, we have applied the Shannon entropy inequality to lead the blow up condition for a drift-diffusion system.

研究分野：解析学

 キーワード：非線形移流拡散方程式系 有限時間爆発解 多成分系 エントロピー シャノンの不等式 初期値問題
空間高次元

1. 研究開始当初の背景

本研究の非線形移流拡散方程式系は、空間2次元の解の構造に微細な特徴が現れる問題である。空間2次元単成分移流拡散方程式系は、数理生物学の分野で研究されている走化性粘菌方程式を中心に数学解析の分野でも活発に研究が行われ、初期値の臨界点が存在して、その臨界点より大きい初期値では解が有限時間で爆発（発散）すること、また臨界点より初期値が小さい場合に解が時間大域的に存在することが知られている。

特にNagaiモデルと呼ばれる単成分系の放物型-楕円型方程式系では、1996年Herrero-Velazquez, 1997Nagai-Senba-Yoshida, 2000年Nagai-Senba-Suzuki, 2000年Senba-Suzukiらによって、正值時間大域解とその一様有界性、爆発解の存在とその初期値臨界点及び特異性が研究され、数学解析法も目覚ましく発展をとげた。

研究代表者は、このような手法をつかって、半導体デバイス内の電子密度と正孔密度に関するモデル方程式、2種走化性生物モデルなどの2成分系移流拡散方程式系について類似の構造が期待できると考え、研究を行ってきた。2003年Kurokiba-Ogawaの研究では、粒子ポテンシャルにattractiveとrepulsiveな反応をする粒子の2成分移流拡散方程式系に対し、2次モーメントの方法を使って、2成分初期値が差が十分大きい場合に2成分の和が有限時刻で爆発することを示した。一方、2006年Nagai-Kurokiba-Ogawaの研究では、この方程式系の2成分初期値がともに十分小さい条件の下、その正值値球対称解が時間大域的に存在し、その解は一様有界であることを明らかにした。これらの2成分移流拡散方程式系の研究は2つの未知関数の和の評価であったが、2009年E.E.A.Espejo-A.Stevens-J.J.L.Velazquesらの研究によって、この問題の爆発解に対して2粒子の未知関数に関する同時-非同時爆発の解分類が示された。

以上のような経緯から問題を2成分の場合

を含む多成分非線形移流拡散方程式系に対する爆発解と時間大域解の数学解析を行うに至った。

2. 研究の目的

本研究は、粒子のポテンシャル場を記述する楕円型偏微分方程式と粒子の振る舞いを記述する放物型偏微分方程式から構成される非線形移流拡散方程式系を研究対象とする。方程式系はポテンシャルの働き方によって、細胞性粘菌の自己組織化機構、半導体デバイスモデル、プラズマ荷電粒子の移動現象を記述する。粒子の相互作用による集中現象と拡散現象のよって粒子が如何なる振る舞いをするかを調べるために、粒子の密度関数を未知関数とした初期値境界値問題あるいは初期値問題に対する数学解析を行う。特に一成分移流拡方程式系の数学解析で得られた手法、結果を適用あるいは改良を行い、2成分、多成分粒子の移流拡方程式系に対し、有限時間爆発解と時間大域解の構造や解の時間大域的挙動および爆発機構について研究を行う。

また空間高次元移流拡散方程式系の解の構造については多くの課題が未解明のままであり、特に有限時間爆発解と時間大域解に関する初期値臨界点の存在や臨界値について示されていない。

以上、空間2次元あるいは空間高次元の多成分非線形移流拡散方程式系の時間大域解と有限爆発解について、数学解析により明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

本研究の研究方法は以下の通りである。

(1) 研究打合せ, 情報交換, 成果発表

本研究課題について共同研究者と詳しい研究打合せを行い、それを基に本研究と関係ある研究者との情報交換を効果的に行い、研究成果の取得を目指す。さらに得られた結果は、京都大学数理解析研究所研究集会、神戸大学解析セミナー、広島大学数理解析セミナー、早稲田大学応用解析研究会、東北大学応用

数学セミナー,九州大学偏微分方程式研究会,日本数学会,そのほか研究会に出席し,講演および情報交換を行う.

(2) 国際研究会

海外にて開催される研究会に出席し,非線形移流拡散方程式に関する本研究の成果発表及び情報交換を行う.

(3) その他

研究活動に必要なコンピュータ,文房具の購入.

4. 研究成果

1. 平成 24 年度 2 成分移流拡散方程式系に対する Mass 分離の研究.

研究代表者は空間 2 次元 2 成分移流拡散方程式系系の解の爆発機構を調べるため,局在化の方法による爆発解の解析及び 2005 年 T. Shafirir-G. Wolansky による対数型 Hardy-Littlewood の不等式の適用することで,2 つの解が同時に爆発する際にそれぞれ同種粒子の集団に分離することを証明した.(鈴木貴教授(大阪大学), E. E. A. Espejo 氏と共同研究).

2. 平成 25 年度 多成分空間 2 次元移流拡散方程式系の可解性と爆発解

成分を一般化した多成分空間 2 次元移流拡散方程式系初期値問題に対する時間局所可解性と有限時間爆発解の存在について研究を行った.多成分である複雑さを抱えた移流拡散方程式系の問題を証明するために,2003 年 Kurokiba-Ogawa の研究で適用した重み付 L^2 関数空間の多成分版を設定した.可解性の証明に必要な方程式系のポテンシャル勾配量の L^∞ ノルムを評価するために,非線形シュレインガー方程式の解析で発案された Brezis-Gallouet の不等式(1980 年)を適用した.その際,重み指数が真に 1 より大きい関数空間で解析を行った.

(小川卓克教授(東北大学)と共同研究).

3. 平成 26 年度 多成分空間 2 次元移流拡散方程式系に対する関数空間の拡張と爆発条件

前年度研究を進展させて,重み指数が 1 を含む重み付 L^2 関数空間に拡張して,時間局所可解性の証明を行った.重み指数が 1 を含む場合は,ポテンシャルの評価に対して, Brezis-Gallouet の不等式を適用できず,評価不等式の改良が必要となった.

2002 年 Kozono-Ogawa-Taniuchi の研究を参考に, Besov 空間上で Littlewood-Paley 分解及び対数型 Hardy の不等式を使って Brezis-Gallouet の不等式に代わる評価不等式を導き,可解性を証明することに成功した.さらに有限時間爆発解については,方程式の移流項が attractive, repulsive それぞれに働く成分の未知関数を分けて,2003 年 Kurokiba-Ogawa の研究に帰着させることにより解が有限時間内に爆発する初期条件を導くことに成功した.

(小川卓克教授(東北大学)と共同研究).

平成 27 年度 空間高次元移流拡散方程式系に対する爆発条件

1995 年 P. Biler の空間高次元一成分移流拡散方程式系にエントロピー評価を使った爆発解に関する研究を進展させ,空間高次元多成分移流拡散式系初期値問題の解の爆発に関する十分条件について研究を行った.情報理論で扱われる Shannon エントロピー不等式の連続版を考案し,2 次のモーメントの方法に適用して爆発十分条件を導いた.これは 2004 年 L. Corrias-B. Perthame-H. Zaag の爆発条件と異なり,彼らの条件以外で解の爆発がおこることを示している.さらなる詳細な爆発機構については今後の研究課題である.

(小川卓克教授(東北大学)と共同研究).

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

Masaki Kurokiba, Takayoshi Ogawa, Finite time blow up for a solution to system of the drift-diffusion equations in higher dimensions, *Mathematische Zeitschrift*, Online publication, 1-24, 2016 年, 査読有 . DOI: 10.1007/s00209-016-1654-5

Masaki Kurokiba, Takayoshi Ogawa, Two Dimensional drift-diffusion System in a critical weighted space, *Differential and Integral Equations*, 28, 753-776, 2015 年, 査読有 .

Masaki Kurokiba, Takashi Suzuki, Ryo Takahashi, On a perturbed system of chemotaxis II, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 92, 305-334, 2014 年, 査読有 . DOI: 10.12732/ijpam.v92i3.1

Masaki Kurokiba, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , *Differential and Integral Equations*, 27, 425-446, 2014 年, 査読有 .

Elio Espejo, Masaki Kurokiba, Takashi Suzuki, Blowup threshold and collapse mass separation for a drift-diffusion system in space-dimension two, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 12, 2627-2644, 2013 年, 査読有 .

〔学会発表〕(計 17 件)

黒木場正城, 高次元移流拡散方程式系の解の有限時間爆発について, 2016年日本数学会年会函数方程式論分科会特別講演, 2016年3月18日, 筑波大学, 茨城県つくば市 .

黒木場正城, Blowing up for a solution to system of the drift-diffusion equations in higher space dimensions, *Second Workshop on Nonlinear Dispersive Equations*, 2015年10月9日, IMECC-UNICAMP, Campinas, Brazil.

黒木場正城, Blowing up for a solution to system of the drift-diffusion equation in three dimension, *ISAAC 2015*, 2015年8月7日, University of Macau, Macao(China).

黒木場正城, Blowing up for a system of the drift-diffusion equations in R^3 , *Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equations 2015*, 2015年02月21日, 東京理科大学理学部, 東京新宿区 .

黒木場正城, Blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^3 , 北海道大学PDEセミナー, 2014年12月26日, 北海道大学大学院理学研究科, 北海道札幌市 .

黒木場正城, Finite time blow up for a solution to system of the drift-diffusion equations in three dimensions, 中華民国数学会招待講演, 2014年12月07日, 国立成功大学, 台北(中華民国) .

黒木場正城, Two dimensional drift-diffusion system in a critical weighted space, 2014年日本秋季数学会総合分科会2014年9月28日, 広島大学, 広島県東広島市 .

黒木場正城, 空間3次元drift-diffusion systemの初期値問題に対する有限時間爆発解について, 愛媛大学解析セミナー, 2014年5月24日, 愛媛大学理学部, 愛媛県松山市 .

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , 第15回北東数学解析研究会, 2014年01月17日, 北海道大学大学院理学研究科, 北海道札幌市 .

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , Workshop on analysis in Kagurazaka, 2014年1月25日, 東京理科大学理学部, 東京都新宿区.

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , 名古屋微分方程式セミナー, 2014年1月20日, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科, 愛知県名古屋市.

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , 第11回浜松偏微分方程式研究集会, 2013年12月24日, 静岡大学工学部, 静岡県浜松市.

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , 北海道大学PDEセミナー, 2013年10月28日, 北海道大学大学院理学研究科, 北海道札幌市.

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , RIMS " 抽象的發展方程式の新たな役割 ~ 個々の偏微分方程式を俯瞰する観点か ~ ", 2013年10月21日, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市.

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , Analysis/PDE seminar, 2013年10月04日, Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara (USA).

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , 第9回非線型の諸問題,

2013年9月6日, 高知大学朝倉キャンパス, 高知県高知市.

黒木場正城, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , 第562回応用解析研究会, 2013年6月8日, 早稲田大学理工学部, 東京新宿区.

6 . 研究組織

研究代表者

黒木場 正城 (KUROKIBA MASAKI)
室蘭工業大学・工学研究科・教授
研究者番号: 6 0 2 9 1 8 3 7