

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540203

研究課題名(和文)可解模型と量子クラスター代数

研究課題名(英文)Integrable models and quantum cluster algebras

研究代表者

国場 敦夫(KUNIBA, ATSUO)

東京大学・総合文化研究科・教授

研究者番号：70211886

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：3次元可積分系の数理解造の解明にむけてその糸口となる成果を得た。(1)SP(4)の量子座標環の表現論を用いて、KulishとIsaevにより1997年に提唱された3次元反射方程式の初めての解を2種類構成し、組合せ論的極限、古典版、多項式表示などを得た。(2)量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の正部分のPBW基底の遷移行列と、量子座標環の連係作用素の行列要素が一致することを全ての古典型 \mathfrak{g} について証明した。(3)四面体方程式の解としてR作用素とL作用素があるが、これらの混合積の2次元簡約から、量子超代数を含む一般化量子群に付随する量子R行列が行列積表示とともに従う事を証明した。

研究成果の概要(英文)：Several results illuminating novel mathematical structures of 3-dimensional integrable systems are obtained. (1) By invoking the representation theory of quantized coordinate ring of SP(4), two kinds of solutions are constructed for the 3-dimensional reflection equation proposed by Isaev and Kulish in 1997 for the first time. Its combinatorial limit, the classical analogue and a polynomial formula are obtained. (2) The transition coefficients of the PBW bases of the positive part of the quantized universal enveloping algebra $U_q(\mathfrak{g})$ are shown to coincide with the matrix elements of the intertwiner of the Soibelman representations of the quantized coordinate ring of \mathfrak{g} for all \mathfrak{g} of finite classical type. (3) For the two solutions known as R-operator and L-operator of the tetrahedron equation, 2-dimensional reduction is performed, and the results are identified with the quantum R matrices for generalized quantum groups including quantum superalgebras.

研究分野：数理物理学

 キーワード：可積分系 量子群 ヤン・バクスター方程式 四面体方程式 量子座標環 3次元反射方程式 PBW基底
表現論

1. 研究開始当初の背景

3次元可積分性の条件として導入された四面体方程式に対して、カイラルポッツ模型に関連した解は詳しく研究されていたが、それ以外は Kapranov らの解, Sergeev による PBW 基底との関係は殆ど忘れられていた。また Bazhanov らによる量子幾何に基づく解の代数的起源も不明であった。更に Isaev-Kulish による3次元反射方程式に至っては非自明な解はひとつも知られていなかった。四面体方程式の解に対する2次元簡約の研究は端緒についたばかりであった。

2. 研究の目的

もともとは高次元可積分性の量子クラスター代数による理解を目指したが、後者との関係を模索する以前に四面体方程式の周辺に多くの重要な未解決問題が存在していることが判明し、まずそれらを解明する事が自然な目的となった。具体的には、量子座標環の表現論における連係作用素とその整合条件を明らかにすること。量子群の正部分の PBW 基底の遷移行列との関係を明らかにすること。四面体方程式の2次元簡約によりヤン・バクスター方程式の解を系統的に構成し、量子群の枠組みの中で特徴づけることなどである。

3. 研究の方法

主なものとして、PBW 基底との関係の研究と2次元簡約の研究に用いた方法を記す。ランク2のリー環 A_2, C_2, G_2 に対して量子座標環 A の基本表現をあらわに書き下し、連係作用素を数式処理プログラムを用いて解かせた。一方で、PBW 基底を入力し、生成元の交換関係から遷移行列を計算させた。まず両者が一致することを確認し、その定義方程式の間の関係を分析し、最終的に証明した。また、3次元 R, L 作用素の2次元簡約については、量子群との可換性を R や L の積の間に成り立つ2次の関係式に翻訳し、それが満たされるような余積や表現を模索した。テンソル積表現の既約性については最高ウェイトベクトルを分類してそれらの漸化式を求め、量子群の作用で全てが移り合うことを種々の帰納法を用いて証明した。

4. 研究成果

3次元可積分系の数理構造の解明にむけてその糸口となる種々の成果を得た。

(1) Kapranov と Voevodsky による $SL(3)$ の量子座標環の表現に付随する四面体方

程式の解と、Bazhanov らによる量子幾何に起源を持つ解が一致することを証明した。これは両者を特徴付ける漸化式が一致する事による。これにより量子座標環の連係関係式自体が3次元 L 作用素による四面体方程式に同値になることも従う。更に $SP(4)$ の量子座標環の Soibelman 表現をあらわに書き下し、ワイル群の最長元に対応する2つの同値な表現の連係関係式を解くことに成功した。得られた連係作用素を $SP(6)$ への埋め込んで考察することにより、それが Kulish と Isaev により1997年に提唱された3次元反射方程式の初めての解を与えることを発見した。これは C_2 に対応するが、その後 B_2 の場合にも同様の構成を行い2種類の解を得た。これらは適宜組み合わせると F_4 の連係作用素のパーツとみなすことができる。実際 F_4 の長さ24の最長元に対応する連係関係式はこれらからなる50個の因子の間の関係式であり、計算機でも確認できることを報告した。その他、 $q=0$ とすると連係作用素は組合せ論的な全単射に移行し、そこでも四面体方程式や3次元反射方程式が保たれる事を指摘した。最後に3次元反射方程式の解の別の明示式として4変数の多項式の特異値として実現する表示を得た。これは将来量子群のモジュラー表現へと拡張する場合の手がかりになることが期待される。

(2) 量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の正部分の PBW 基底の遷移行列と、量子座標環の「最大表現」の連係作用素は共にワイル群の最長元でラベルされるが、両者の行列要素が一致することを全ての古典型 \mathfrak{g} について証明した。遷移行列は Drinfeld-Jimbo 生成元の左右からの積の作用に対して標準形へ再編するというプロセスに沿った漸化式に従う。一方量子座標環を一部の元を用いて適当に局所化するとその表現行列が上記の Drinfeld-Jimbo 生成元の表現行列と一致することをランク2の場合に個別に直接確認できる。これらの結果を組合せて最終的な証明に至った。我々の定理はその後複数の研究者により独立な証明が与えられ、応用を生んでいる。

(3) 四面体方程式の解として R 作用素と L 作用素があるが、これらの混合積の2次元簡約から、量子超代数を含む一般化量子群に付随する量子 R 行列が行列積表示と共に従う事を証明した。進展の経由としてはまず2012年に研究代表者と Sergeev との共同研究により全ての因子が L 作用素の場合には境界ベクトルを用いた2次元簡

約を行うと量子アフィン・リー環のスピ
ン表現の量子 R 行列が得られることが示
されていた. その時の手法を活用して 2013
年には全ての因子がより複雑な R 作用素
である場合を扱い, 同様の簡約から
Dynkin 図の端が二重矢印になる全ての量
子アフィン・リー環の q 振動子表現の量子
 R 行列(連係作用素)が得られることを証明
した. これらの知見を総合して 2014 年か
ら 2015 年にかけて R 作用素と L 作用素が
混在する最も一般的な場合を扱い, 更に境
界ベクトル以外にも, トレースによる 2 次
元簡約まで含めた状況を分析することが
可能になった. その結果, 得られるヤン・
バクスター方程式の解は Heckenberger や
山根宏之により導入された一般化量子群
の量子 R 行列の例を与えることを発見し
た. これは量子超代数を含み, これまで得
られた 2 次元簡約の結果のほぼ全てを包
括する集大成になっている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① A. Kuniba and S. Maruyama, A polynomial formula for the solution of 3D reflection equation. *J. Phys. A*: 48 (2015) 135204 (19pp) (査読有)
- ② A. Kuniba, M. Okado and S. Sergeev, Tetrahedron Equation and Quantum R Matrices for modular double of $U_q(D^{(2)}_{n+1})$, $U_q(A^{(2)}_{2n})$ and $U_q(C^{(1)}_n)$. *Lett. Math. Phys.* 105 (2015) 447-461. (査読有)
- ③ A. Kuniba and M. Okado, Tetrahedron equation and quantum R matrices for q -oscillator representations of $U_q(A^{(2)}_{2n})$, $U_q(C^{(1)}_n)$ and $U_q(D^{(2)}_{n+1})$. *Commun. Math. Phys.* 334 (2015) 1219-1244. (査読有)
- ④ A. Kuniba and M. Okado, Tetrahedron equation and quantum R matrices for q -oscillator representations. *J. Phys: Conference Ser.* 597 (2015) 012051 (10 pp). (査読有)
- ⑤ A. Kuniba and M. Okado, Tetrahedron equation and quantum R matrices for infinite dimensional modules of $U_q(A^{(1)}_1)$ and $U_q(A^{(2)}_2)$. *J. Phys. A: Math.Theor.* 46 (2013) 485203 (12pp).
- ⑥ A. Kuniba and S. Sergeev, Tetrahedron Equation and Quantum R Matrices for Spin Representations of $B^{(1)}_n$, $D^{(1)}_n$ and $D^{(2)}_{n+1}$. *Commun. Math. Phys.* 324 (2013) 695--713. (査読有)
- ⑦ A. Kuniba, M. Okado and Y. Yamada, A common structure in PBW bases of the nilpotent subalgebra of $U_q(\mathfrak{g})$ and quantized algebra of functions. *SIGMA* 9 (2013) 049 (23pp) (査読有)
- ⑧ R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba and T. Nakanishi, Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Types C_r , F_4 and G_2 . *Publ. RIMS* 49 (2013) 43-85. (査読有)
- ⑨ R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba and T. Nakanishi, Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r . *Publ. RIMS* 49 (2013) 1-42. (査読有)
- ⑩ A. Kuniba and M. Okado, Tetrahedron and 3D reflection equations from quantized algebra of functions. *J. Phys. A*: 45 (2012) 465206 (27pp). (査読有)
- ⑪ A. Kuniba and M. Okado, A solution of the 3D reflection equation from quantized algebra of functions of type B. *Nankai Series in Pure and Applied Mathematics and Theoretical Physics*, 11 (2013) 181-190. (査読有)

[学会発表] (計 7 件)

- ① 尾角正人, 四面体方程式と量子群, 日本数学会代数学分科会特別講演, 2014 年 9 月 26 日, 広島大学 (広島県・東広島市)
- ② 国場敦夫, Tetrahedron equations and quantum R matrices for q -oscillator representations, XXXth International Colloquium on Group Theoretical Methods, in Physics, 2014 年 7 月 17 日, Ghent 大学, ゲント (ベルギー)
- ③ 国場敦夫, 尾角正人, 四面体方程式と q -振動子表現の量子 R 行列, 日本数学会, 2014 年 3 月 18 日, 学習院大学 (東京都・豊島区)
- ④ 国場敦夫, 尾角正人, 山田泰彦, U^+_q の PBW 基底と量子座標環, 日本数学会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学 (愛媛県・松山市)
- ⑤ 国場敦夫, 尾角正人, 量子座標環と 3 次元反射方程式, 日本数学会, 2013 年 3 月 22 日, 京都大学 (京都府・京都市)
- ⑥ 国場敦夫, S. Sergeev, Tetrahedron Equation and Quantum R Matrices for Spin Representations, 日本数学会, 2012 年 9 月 19 日, 九州大学 (福岡県・福岡市)
- ⑦ 国場敦夫, Tetrahedron and 3D reflection equations from quantized algebra of functions, The XXIX International Colloquium on Group

Theoretical Methods in Physics, 2012
年8月21日, Nankai 大学, 天津(中華人民共和国)

尾角 正人 (OKADO Masato)
大阪市立大学・理学研究科・教授
研究者番号: 70221843

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計◇件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://mailds.c.u-tokyo.ac.jp/~kuniba/atsuo/publications.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

国場 敦夫 (KUNIBA ATSUO)
東京大学・総合文化研究科・教授
研究者番号: 70211886

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

山田 泰彦 (YAMADA Yasuhiko)
神戸大学・理学部・教授
研究者番号: 00202383

中西 知樹 (NAKANISHI Tomoki)
名古屋大学・多元数理研究科・教授
研究者番号: 80227842