様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 6 月 12 日現在

機関番号：12601
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：24540205

研究課題名（和文）パンルヴェ方程式を中心とした可積分系の研究

研究課題名（英文）Studies on integrable systems aroud the Painleve systems

研究代表者
坂井　秀隆（SAKAI, HIDETAKA）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：50323465

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において，パンルヴェ方程式の理論の高次元化を目的としてきた．
　4次元の場合，方程式の部分的な分類が，川上・中村・坂井によって得られたが，分岐型の場合に拡張し，分類を完成させる理論として，前論文の共同研究者の川上氏によって完成されつつある．また，分類を幾何学的に書き換えるという課題についても，共同研究者の中村氏の博士論文において，最初の一歩が得られた．中村氏の結果は，分類に現れた方程式の自励極限を考え，ファイバーの退化から浪川・上野による種数２の曲線の退化の分類を使い，方程式を特徴付ける．
　坂井個人としてはあまり貢献できていないが，研究グループとしては当初目的をかなり達成できたと思う．

研究成果の概要（英文）：In this research project we have been seeking a higher dimensional analog of theory of the Painleve equations.
In the case of 4-dimension, Kawakami-Nakamura-Sakai had obtained partial classification of the Painleve-type equations. One of the coauthors, Kawakami, is finishing the classification, considering the ramified cases. About another goal of this project, geometrical characterization of the classification, Nakamura, who is another coauthor, took the first step on it. She gave a characterization of the equations by using Namikawa-Ueno's classification of degeneration of genus two curves.
Although Sakai didn't make a big contribution on the development of the theory, our group of research accomplished the initial goals to a respectable degree.

研究分野：大域解析学

キーワード：パンルヴェ方程式　特殊函数　差分方程式　超幾何函数

１．研究開始当初の背景

研究領域は非線型可積分系といわれる分野である．非線型の函数方程式については，線型の同様な問題と比べて有効な一般論を構築することが難しい．解となる函数の具体的な性質にいたっては，代数函数や超幾何函数などのよく知られた特殊函数によって具体的に記述できる特別な場合を除くと，なかなか解析ができないのが現状である．一方で，楕円函数，超幾何函数などの特殊函数によってひとたび記述されてしまえば，劇的にいろいろな計算が可能となってくる．

楕円函数などのよく知られた特殊函数とは別の新しい特殊函数を作ろうという試みは当然のもので，パンルヴェ方程式はこのような意図の下，二十世紀はじめに発見され，しばらくの沈黙を置き，1970 年代の Wu 氏らによる可解格子模型の相関函数の記述などに数理物理への応用を見出し，岡本和夫氏による初期値空間の構成，アフィン・ワイル群対称性の定式化，更に，梅村浩氏の微分ガロア理論を用いた既約性の証明と盛んに研究されてきた．

一方で，１９９０年代より，主にソリトン方程式の特殊化から，多くの高階 Painleve 型方程式が発見されるようになった．これらのうちのいくつかは，古典的な Garnier 系の制限などで得られることが分かったが，いくつかのものは古典的に知られたものには帰着されずに残った．ここで，Garnier 系に帰着できなかった方程式の中に野海山田系や笹野系がある．これらはアフィン Weyl 群対称性や，初期値空間など，Painleve 方程式の持つ様々な観点の一般化として考案された．

実は，Painleve の方法を直接高階に拡張しようとした Cosgrove の試みが知られている．しかし，これは，単独高階正規形の方程式の表式から分類していて，1 階連立の正準方程式系で与えられる Painleve 型方程式の表式とうまく合わない．また，式の形に全面的によった計算なので，それが本質的な分類になっているのかもよくわからない．実際，非線型微分方程式は，簡単な座標変換によって，その表式が全く違ったものになってしまうので，本質的に同じ方程式が全く違う別の表式を持ってしまう．

モノドロミー保存変形の理論からの分類を目指した川上・中村・坂井の結果が出るまでは，このようにして，高次元の理論に関しては，散発的な結果が多く，整理されたものにはなっていなかった．

２．研究の目的

パンルヴェ方程式などで定義される函数の仲間に対して，代数幾何学的な手法を使って，特殊函数論としての理論を構築しようと考えている．本研究課題以前の研究によって，周辺の問題を整理することができ，いくつかの拡張的な問題に対する理論の構築が行えた．研究内容，研究目的については重要な問題を考えているという認識があるので，引き続いて同様の問題意識で研究を続けていきたいと考えていた．この際，とくに，20 世紀終わりころから盛んになったパンルヴェ方程式の離散化の理論と，筆者が主に関わった有理曲面の理論が，このための鍵になると考える．

パンルヴェ方程式の拡張としては，多変数化，高次元化，離散化を念頭に置いている．これらの非線型可積分系に関して，次の３つの方向性からの理解を得ることを目的とする．

1. 種々の拡張に関して，その総体を特徴づけること．とくに，分類理論の構築．
2. 分類理論の幾何学化．
3. 解となる超越函数の解析的性質の研究．

この三つの項目のうち，ひとつ目は種々の拡張に関する分類理論の構築である．パンルヴェ方程式の高次元化としては，ガルニエ系およびその退化が，古典的に知られる方程式系として研究されてきたが，それ以外にも野海・山田系や笹野系などの方程式系が散発的に研究されてきた．これらを線型方程式の変形理論の観点から整理しようというのが動機であった．フックス型方程式の変形理論から得られる４次元パンルヴェ型方程式は，ガルニエ系，藤・鈴木系，笹野系，行列パンルヴェ系の４つに分類されるという坂井の結果を受けて，これらの方程式系の退化図式を構成するというのが川上・中村・坂井の結果で，ほとんどの知られていた４次元パンルヴェ型方程式はこの中に見つけられる．ただし，この分類は，線型方程式が不分岐であるという制限があるため，より完全なリストのためには分岐がある場合の線型方程式の変形理論も考察しなくてはならない．

ふたつ目の項目は，分類理論の幾何学化ということであるが，これは 2 次元の場合，つまり古典的なパンルヴェ系の場合には，筆者の博士論文で行われている．パンルヴェ超越函数は楕円函数の非自励化と見なすことができる．この見方を幾何学的に解釈すると，パンルヴェ方程式を有理楕円曲面の一般化と見なせる有理曲面に対応づけることができる．この曲面自体は岡本和夫氏によって構成されていたのだが，岡本氏の曲面をそのように見ることができるということである．高次元の場合にも，とくに４次元の場合には，パンルヴェ型方程式の（部分的な）分類が得られたわけであるから，それらに対応する空間の構成および特徴付けが次の問題となる．これらのパンルヴェ型方程式のタウ函数をテータ函数の一般化と見ることで，ヤコビ多様体を用いて構成される多様体のさらに一般化したものが求めるものになっているだろうと予想される．

３．研究の方法

(1)アイディアを思いつくための数学的対象に関する思考実験，計算，文献調査，(2)共同研究者との議論，アイディアの交換，(3)国内外の研究者たちとの交流，議論．とくに，セミナー，研究集会などに多く参加すること．人に話をすること，人の話を聞くこと．

研究目的を達成するにあたり，国内外の研究者との研究交流を最も大事なものと考えている．研究代表者が東京大学で主催している公開セミナー(通称:岡本セミナー)，および世話人の一人をつとめている古典解析セミナーを母体として，国内外の研究集会に参加することなども含め，とくに若手研究者間の共通の問題意識の交換をはかり，柔軟な研究手法で研究を遂行することを目指す．

東京大学の研究生，院生を研究協力者に加え，複素領域の常微分方程式論，非線型可積分系の理論に関して古くから東京大学が果たしてきた，研究の中心としての役割を担えるような体制を築く．

４．研究成果

本研究において，目的の一つとして，パンルヴェ方程式の理論の高次元化を挙げてきた．

4 次元の場合，方程式の部分的な分類が，付随する線型方程式の分類から，川上・中村・坂井によって得られていたが，これを分岐型方程式の場合に拡張して，分類を完成させる理論として，前論文の共同研究者であった川上拓志氏によって完成されつつある．

また，この分類を幾何学的な文脈に置き換えるというふたつ目の課題についても，共同研究者であった中村あかね氏の博士論文において，最初のステップを完成した．中村氏の結果は，川上・中村・坂井の結果および川上氏による分類に現れた方程式の自励極限を考え，その場合のファイバーの退化の様子から方程式を特徴付けようというものであり，具体的には，浪川・上野による種数２の曲線の退化の分類表で，方程式は特徴付けられる．

研究代表者である坂井個人の成果としてはあまり貢献できていないのであるが，研究グループとしては当初目的に挙げていたような理論をかなり達成できたと考えている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① H. Sakai : “Ordinary differential equations on rational elliptic surfaces", Symmetries, Interable Systems and Representations, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 40(2012) 515--541.

② H. Kawakami, A. Nakamura, and H. Sakai: “Toward a classification of four dimensional Painleve-type equations”, Algebraic and Geometric Aspects of Integrable Systems and Random Matrices, AMS Comtemporary Mathematics 593 (2013) 143--162.

〔学会発表〕（計　5　件）

①坂井秀隆，Toward a classification of 4-dimensional Painleve-type equations: Various Aspects on the Painleve Equations (京大数理研) 2012 年 11 月．

②坂井秀隆，Monodromy preserving deformation and 4-dimensional Painleve type equations: Workshop on Integrable Systems (University of Sydney) 2013 年 12 月．

③坂井秀隆，Studies on the Painleve equations: 微分方程式の総合的研究(東大) 2013 年 12 月．

④坂井秀隆，Linear q-difference equations and q-analog of middle convolution (joint work with M. Yamaguchi): Moduli Spaces of Connections (Renne, France) 2014 年 7 月．

⑤坂井秀隆，Rational surfaces and geometry of the Painleve equations: Three days of the Painleve equations and their applications (Roma Tre University, Italy) 2014 年 12 月．

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕

ホームページ等
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/sakai.html

http://researchmap.jp/sky/

６．研究組織

(1)研究代表者

坂井　秀隆（SAKAI HIDETAKA）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：50323465