

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540210

研究課題名(和文)無限次元代数及び場の量子論の解析とその数理物理への応用

研究課題名(英文)Analysis of infinite dimensional algebras and quantum field theories and application to the mathematical science

研究代表者

栗田 英資 (Awata, Hidetoshi)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：40314059

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)： q 変形ピラソロ代数、 q 変形 W 代数やそれらを含むディン・庵原・三木代数の表現論を解析した。特に、ディン・庵原・三木代数のインタートワイナーを合成すると、代数の遮蔽演算子が得られることが分かった。それを用い、相関関数のワード高橋恒等式、ループ方程式、量子スペクトル曲線とその正則性を導いた。更に、インタートワイナーのブレイド関係式とシフト関係式を用い、ディン・庵原・三木代数の R 行列や (qt) -KZ方程式を導出した。

又、 $N=6$ の超対称性を持つチャーンサイモン理論(ABJ理論)を解析した。レンス空間の行列模型の分配関数を計算し、それを解析接続することにより、ABJ理論の分配関数の積分表示を導出した。

研究成果の概要(英文)：We analyzed the representation theory of the q -Virasoro, q - W and Ding-Iohara-Miki algebras. We found that the screening charge is constructed by the product of intertwining operators. By using this we derived Ward-Takahashi identity, loop equation, quantum spectral curve and its regularity. By using the braid and shift relations of the intertwining operators, we obtained R -matrix and (qt) -KZ equation of Ding-Iohara-Miki algebra.

We also analyzed $N=6$ supersymmetric Chern-Simons-matter theory (ABJ theory). We first calculated the partition function of the lens space matrix model and next obtained the ABJ partition function by analytically continuing it.

研究分野：無限可積分系

キーワード：ピラソロ代数 ディン・庵原・三木代数 ネクラソフ分配関数 AGT対応

1. 研究開始当初の背景

無限次元対称性(ピラソロ代数、 W 代数及びカツ・ムーディー代数など)を持つ場の量子論つまり共形場理論は、超弦理論や低次元系の臨界点における解析を著しく発展させてきた。現在その中心課題の一つはその非臨界点への適用であるが、これも又 q 変形された共形場理論で遂行されつつある。特に、4次元超対称ヤン・ミルズ理論の分配関数に対するネクラソフ公式が、ピラソロ代数のある種の行列要素で与えられるというダビデ・ガイオットの斬新な予想(AGT対応)がある。申請者は山田泰彦氏(神戸大学)との共同研究によって、このAGT対応を5次元に拡張し、5次元超対称ヤン・ミルズ理論の分配関数に対するネクラソフ公式が、 q 変形ピラソロ代数の擬特異状態の内積で与えられるという予想を提出し、いくつかの具体例でその予想を確認していた。

2. 研究の目的

本研究では、主に非臨界点の解析を念頭に置きながら、無限次元代数及び場の量子論の解析とその素粒子論や物性論などの数理物理への応用を目的とした。

特に、AGT対応とその5次元への拡張つまり、4次元及び5次元超対称ヤン・ミルズ理論の分配関数(ネクラソフ公式)と(q 変形)ピラソロ代数や(q 変形) W 代数との間の関係を解析し、超弦理論の隠れた対称性や第一原理の手がかりをつかむ事が本研究の目的の一つであった。

3. 研究の方法

本研究は、素粒子論のみならず物性理論、代数学、代数幾何学等と広範な分野にまたがっているため、研究遂行には各分野の研究者との交流が不可欠であった。又、効率的に研究を進めるため、多くの共同研究者と研究を分担して行った。研究協力者として、共同研究者である本研究科の菅野浩明教授、東大数理科学研究科の白石潤一准教授、神戸大学理学部の山田泰彦教授、柳田伸太郎氏、ランダウ研究所の Boris Feigin

教授にも研究に参加して頂いた。

研究協力者の役割分担は、菅野氏が、位相的弦理論の解析を通した超弦理論的アプローチを、白石氏と Feigin 氏が、ディン・庵原・三木代数の解析を通した代数的アプローチを、山田氏が、パンルベ型方程式の解析を通した解析的アプローチを、柳田氏が、爆発公式の解析を通した幾何的アプローチを、そして栗田が、研究総括を行った。

4. 研究成果

(0) 本研究申請後かつ本研究開始前に、本研究代表者は Boris Feigin 氏(ランダウ研究所)、白石潤一氏(東京大学)との共同研究によって、ディン・庵原・三木代数のインタートワイナーを構成した。その行列要素は5次元超対称ヤン・ミルズ理論の分配関数(ネクラソフ公式)の構成要素である精密化位相的頂点そのものを与えることも分かった。これにより、ディン・庵原・三木代数の相関関数は5次元超対称ヤン・ミルズ理論の分配関数に等しい事が証明できた。このインタートワイナーは非常に重要で、最近のディン・庵原・三木代数やAGT対応の解析の中心的役割を担っている。

(1) ディン・庵原・三木代数の表現論、特にそのインタートワイナーの性質を調べ、菅野浩明氏(名古屋大学)、Alexei Morozov 氏(ITEP)らとの共同研究によって以下の結果を得た。

ディン・庵原・三木代数のインタートワイナーを合成すると、代数の遮蔽演算子が得られることが分かった。その遮蔽演算を用いて構成される特異状態が代数の消滅演算子で消えるという条件から、相関関数のワード高橋恒等式、ループ方程式、量子スペクトル曲線とその正則性を導いた。又、それらの楕円化も行なった。

更に、インタートワイナーのブレイド関係式とシフト関係式を用い、ディン・庵原・三木代数のR行列や (qt) -KZ方程式を導出した。

(2) q 変形ピラソロ代数、 q 変形 W 代数やそれらを含むより一般的なディン・庵原・三木代数の q の特殊値 $q=1, 0, -1$ での振舞を調べ

た。

q変形ピラソロ代数の $q=-1$ 極限に、 $N=1$ 超対称ピラソロ代数が現れる事を確認した。更に q変形W代数への拡張も考察した。

q変形ピラソロ代数や q変形W代数を含むより一般的なディン・庵原・三木代数のある生成子の固有ベクトル(一般化マクドナルド関数)の $q=1$ 極限は、Morozov-Smirnov の一般化ジャック関数になっていることを確認した。

大久保勇輔氏(ロシア国立大学経済高等学校)、藤野弘基氏(名古屋大学)との共同研究によって、変形ピラソロ代数の $q=0$ 極限を考察し、その4点関数が5次元 $SU(2)$ ネクラソフ分配関数の $q=0$ 極限に一致することを証明した。更に、q変形ヴィラソロ代数を含むレベル2のディン・庵原・三木代数の $q=0$ 極限も又、よい極限になっている事が分かった。

(3) 藤博之氏(香川大学)、菅野浩明氏(名古屋大学)、真鍋征秀氏(ワルシャワ大学)、山田泰彦氏(神戸大学)との共同研究によって、AGT対応を表面演算子が入った場合に拡張した。表面演算子入りの $SU(2)$ インスタントン分配関数を計算し、退化演算子入りの共形ブロックと一致する事を確かめた。

(4) $N=6$ の超対称性を持つチャーンサイモン理論(ABJ理論)を解析した。平野真司氏(ウィットウォーターランド大学)、重森正樹氏(京都大学)との共同研究によって、レンス空間の行列模型の分配関数を計算し、それを解析接続することにより、ABJ理論の分配関数の積分表示を導出した。この結果は、その後のフェルミガス表示を用いたABJ理論研究の発展に大きく貢献した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者

には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

Hidetoshi Awata, Hiroaki Kanno, Andrei Mironov, Alexei Morozov, Andrey Morozov, Yusuke Ohkubo, Yegor Zenkevich, ``Anomaly in RTT relation for DIM algebra and network matrix models,'` Nuclear Physics B918 (2017) 358-385. 査読有.

Hidetoshi Awata, Hiroaki Kanno, Andrei Mironov, Alexei Morozov, Andrey Morozov, Yusuke Ohkubo and Yegor Zenkevich, ``Toric Calabi-Yau threefolds as quantum integrable systems. R-matrix and RTT relations,'` Journal of High Energy Physics, 10 (2016), 1-49. 査読有.

Hidetoshi Awata, Hiroaki Kanno, Takuya Matsumoto, Andrei Mironov, Alexei Morozov, Andrey Morozov, Yusuke Ohkubo and Yegor Zenkevich, ``Explicit examples of DIM constraints for network matrix models,'` Journal of High Energy Physics, 07 (2016) 1-67. 査読有.

Hidetoshi Awata and Hiroaki Kanno, ``Changing the preferred direction of the refined topological vertex,'` Journal of Geometry and Physics 64, 2013, Pages 91110. 査読有.

Hidetoshi Awata and Shinji Hirano and Masaki Shigemori, ``The partition function of ABJ theory,'` Progress of Theoretical and Experimental Physics 2013, 053B04(39 pages). 査読有.
DOI: 10.1093/ptep/ptt014.

Hidetoshi Awata, Hiroyuki Fuji, Hiroaki Kanno, Masahide Manabe and Yasuhiko Yamada, ``Localization with a Surface Operator, Irregular Conformal Blocks and Open

Topological String, "Advances in Theoretical and Mathematical Physics 16 (2012) 725--804. 査読有.

Hidetoshi Awata, Boris Feigin and Jun'ichi Shiraishi. "Quantum Algebraic Approach to Refined Topological Vertex," JHEP 1203 (2012) 041. 査読有.
DOI: 10.1007/JHEP03(2012)041.

[学会発表](計 4 件)

Hidetoshi Awata, "On the Ding-Iohara-Miki algebras," August 26, 2016, Workshop and School "Quantum Geometry, Duality and Matrix Models" Lebedev Physics Institute, Moscow, RUSSIA, August 22--28, 2016.

Hidetoshi Awata, "On Five-dimensional AGT Relations", September 4, 2014, The Simons Center Program "Gauge Theory, Integrability, and Novel Symmetries of Quantum Field Theory", Organized by Anton Kapustin, Nikita Nekrasov, Samson Shatashvili, Volker Schomerus and Konstantin Zarembo, The Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook University, Stony Brook, U.S.A.

Hidetoshi Awata, "On AGT conjectures," March 18, 19, 20, 2013, Special lectures at Seoul university, Physics department, Seoul university.

Hidetoshi Awata, "Quantum Algebraic Approach to Refined Topological Vertex," August 21, 2012, The XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, August 20--26, 2012, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

粟田 英資 (AWATA, Hidetoshi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 40314059

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

(4) 研究協力者

()