

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 10 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540211

研究課題名(和文) ランダムな複素力学系および正則写像半群の力学系の研究

研究課題名(英文) Research on random complex dynamics and the dynamics of semigroups of holomorphic maps

研究代表者

角 大輝 (Sumi, Hiroki)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：40313324

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：複素多様体上の正則写像のなす半群の力学系と、正則写像の族によるランダム力学系の両者の理論を、互いに交錯させながら基礎から構築し、出来上がった理論を純粋数学にとどまらず非線形物理学や数理生物学などの他分野へ思想的・哲学的に訴えかけた。ランダム力学系におけるカオスと秩序の間のグラデーションなど、新しい世界観を提供した。具体的には、「協調原理」により大概のランダム複素多項式力学系において通常複素力学系よりカオス性が弱まり、秩序性が生まれることを発見し、カオス性が弱まった中にもカオスと秩序の間のグラデーションが存在していることを発見して、マルチフラクタル解析などを用いて研究を深化させている。

研究成果の概要(英文)：I investigated the random dynamics of rational maps and the dynamics of semigroups of rational maps on the Riemann sphere. I showed that regarding random complex dynamics of polynomials, generically, the chaos of the averaged system disappears at any point in the Riemann sphere, due to the automatic cooperation of the generators. I investigated the iteration and spectral properties of transition operators acting on the space of (Hoelder) continuous functions on the Riemann sphere. I showed that the set of stable systems is open and dense in the space of random dynamical systems of polynomials. Also, I investigated the limit state functions. By taking a partial derivative of the function of probability of tending to a minimal set with respect to a probability parameter, I introduced a complex analogue of the Takagi function. I am developing multifractal analysis for limit state functions and the complex analogue of the Takagi function.

研究分野：複素力学系

 キーワード：複素力学系 ランダム複素力学系 フラクタル エルゴード理論 協調原理 ジュリア集合 複素解析
 有理半群

1. 研究開始当初の背景

力学系理論はある一定の規則のもと時間とともに物事がどう変わっていくかを調べる分野であり、あらゆる自然科学・人文科学の分野に数理モデルとして現れる。そのうち、実直線上の多項式力学系はもっともポピュラーでかつ重要な研究対象である。その場合は、複素平面全体に相空間を拡げたほうが解析が行いやすい。また、一方で、自然界に多くランダム項があることから、毎回、ある確率分布に従って写像を選択するような「ランダム力学系」を調べることも重要と思われる。両者のアイデアを総合して、ランダム複素力学系を調べるのが自然かつ重要と思われる。独立同分布ランダム複素力学系を調べる際には、付随する有理関数の半群（以下有理半群とよぶ）のリーマン球面上での力学系を調べることが必須となる。以上のことから、ランダム複素力学系理論および有理半群の力学系理論を同時に扱い発展させることが重要と思われる。ランダム複素力学系理論は1990年代初頭にFornaessとSibonyによりはじめられ、有理半群の力学系理論は同じころHinkkanenとMartinの研究と、中国のRenのグループによりはじめられた。私は彼らとは独立に有理半群の力学系理論の研究をはじめた。なお、私はランダム力学系理論と有理半群の力学系理論を結び付けて統合させた理論をはじめて組織的に研究しはじめた。

2. 研究の目的

複素多様体上の正則写像のなす半群（以下正則写像半群）の力学系と、正則写像の族によるランダム力学系の両者の理論を、互いに交錯させながら基礎から構築し、出来上がった理論を純粋数学にとどまらず非線形物理学や数理生物学などの他分野へ思想的・哲学的に訴えかけることにある。ランダム力学系におけるカオスと秩序の間のグラデーションなど、新しい世界観を提供していく。非線形物理学では、数値実験により、ランダム実力学系において、ノイズを入れるとカオスが秩序的状況に変わる現象（雑音誘起秩序）や、逆にカオス性が増す現象（雑音誘起カオス）が数多く観察されているが、その数学的背景をランダム複素力学系を通して解明することも目標である。

3. 研究の方法

ランダム複素力学系、有理半群ともに、既存の理論はあまりない。すべて一から道具立てを作り、通常の一つの有理関数（写像）の反復合成の力学系理論とフラクタル幾何学における反復関数系理論の両者の方向をにらみつつ、作用素論やエルゴード理論における「熱力学形式」、「マルチフラクタル解析」などの強力な理論体系をうまく絡ませてランダム複素力学系理論と有理半群の理論の両者の理論を同時に発展させていく。詳しく述

べると、類似の話題である、(1) 確率過程としてのランダム複素力学系 (2) 有理半群 (3) 歪積写像の力学系 (4) 列ごとの力学系 (5) 反復関数系の類似 (6) パラメータ空間の研究 (7) 半群の作用をコホモロジー群で表現することなどの数項目を、「同時」にかつ総合的に発展させていくことが重要な方法である。この方法により、ランダム複素力学系特有の現象（ランダム性により誘起される現象）などが浮き彫りにされる。

4. 研究成果

大まかにわけて (1) (確率過程としての) ランダム複素力学系 (2) ランダム複素力学系の極限状態に現れる関数の解析、特にマルチフラクタル解析 (3) 有理半群固有の話題が成果として挙げられる。

(1) ランダム複素力学系においては、多項式全体の空間における確率測度を考え、毎回その確率測度に従って多項式写像を選択する独立同分布ランダム力学系を考える。私は「2次以上の多項式の空間の確率測度で台がコンパクトなものの空間を考えると、その空間のある位相で開かつ稠密な部分集合において、その集合に属する任意の確率測度について、核ジュリア集合が空となり、平均化システムのカオス性は（連続関数の空間への作用の観点では）消滅し、かつ摂動に関し安定である」ことを示し、論文にまとめて出版した。これは通常の複素力学系では起こりえない、ランダム複素力学系特有の新現象であり「協調原理」と呼んでいる。なお、連続関数の空間への作用のカオスが消滅しても、ある指数以上のヘルダー連続関数の空間への作用に依然としてカオス性が残りうることも発見し、それを「カオスと秩序の間のグラデーション」とよび、研究を行っている。

(2) 上記で特に、極限状態関数である「悪魔の階段の複素平面上版」やその確率パラメータによる偏微分である「高木関数の複素平面上版」の各点ヘルダー指数についてそのマルチフラクタル解析などを行っており、研究が発展中である。

(3) このほか拡大的有限生成有理半群で開集合条件を満たすと限らないもののジュリア集合のハウスドルフ次元の研究などを行った。また、無限生成拡大的有理半群で開集合条件を満たすもののジュリア集合のハウスドルフ次元を研究し、それを拡大的と限らない有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元の研究に応用した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

Hiroki Sumi, Random complex dynamics and devil's coliseums, Nonlinearity 28 (2015)1135-1161. DOI:10.1088/0951-771

5/28/4/1135. 査読有

Rich Stankewitz and Hiroki Sumi,
Random Backward Iteration Algorithm
for Julia sets of Rational Semigroups,
Discrete and Continuous Dynamical
Systems Ser. A, 35 (2015), no. 5,
2165--2175. DOI:10.3934/dcds.2015.35.
2165. 査読有

Kota Hiratsuka, Yuzuru Sato, and Zin
Arai, "Computability and Complexity of
Julia Sets: a review," NOLTA journal,
vol 5:4, p410-423, (2014).
DOI:http://dx.doi.org/10.1587/nolta.
5.410 査読有

Hiroki Sumi, Cooperation principle,
stability and bifurcation in random
complex dynamics, Adv. Math. 245
(2013)137--181. DOI:
http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2013
.05.023. 査読有

Hiroki Sumi, Dynamics of
postcritically bounded polynomial
semigroups II: fiberwise dynamics
and the Julia sets, J. London Math. Soc.
(2)88(2013)294-318. DOI:10.1112/jlms/
jdt017. 査読有

Mariusz Urbanski and Hiroki Sumi,
Transversality family of expanding
rational semigroups, Adv. Math. 234
(2013)697--734. DOI:10.1016/j.aim.201
2.10.020. 査読有

Yuzuru Sato and Shun-ichi Amari,
Robust computation in two
dimensional neural field, Advances
in Cognitive Neurodynamics, p123-129,
(2013). DOI:10.1007/978-94-007-4792-0
_17. 査読有

Kota Hiratsuka, Yuzuru Sato, and Zin
Arai, Computability and Complexity of
Julia Sets, Proc. of NOLTA2013, p2-5,
(2013). DOI: なし 査読有

Kazuhiro, Matsumoto, Yuzuru Sato,
Hiroshi, Endo, Keiichi, Kitajo, Random
dynamical systems modeling for brain
wave synchrony, Proc. of NOLTA2013,
p395-398, (2013) DOI: なし 査読有

Mariusz Urbanski and Hiroki Sumi,
Bowen parameter and Hausdorff
dimension for expanding rational
semigroups, Discrete and Continuous
Dynamical Systems Series A, Vol. 32,

2591--2606, 2012. DOI:10.3934/dcds.20
12.32.2591. 査読有

Yuzuru Sato and Kazuhiro Matsumoto,
Random dynamics from time-serieses of
physiological rhythms, Proc. of
NOLTA2012, p497-500, (2012). DOI: な
し 査読有

[学会発表](計 34 件)

角大輝, 「ランダム複素多項式力学系にお
けるランダム性誘起現象とリアプノフ指
数の負値性」日本数学会 明治大学 2
0 1 5 年 3 月 2 3 日

Johannes Jaerisch and Hiroki Sumi,
「Multifractal analysis for complex
analogues of the devil's staircase and
the Takagi function in random complex
dynamics」研究集会「Workshop on β -
 β -transformation and related topics」
九州大学 2 0 1 5 年 3 月 1 0 日 (招待
講演)

Hiroki Sumi, 「Negativity of Lyapunov
exponents of generic random dynamical
systems of complex polynomials」
AMS-MAA Joint mathematics meeting, San
Antonio, アメリカ, 2 0 1 5 年 1 月 1 1
日 (招待講演)

Hiroki Sumi, 「Complex analogues of the
Takagi function in random complex
dynamics」数理解析研究所研究集会「複
素力学系の総合的研究」2 0 1 4 年 1 2
月 8 日 (招待講演)

Hiroki Sumi, 「Complex analogues of the
Takagi function in random complex
dynamics」研究集会「エルゴード理論と
その周辺」熊本大学, 2 0 1 4 年 1 2 月
3 日

Hiroki Sumi, 「Negativity of Lyapunov
exponents of generic random dynamical
systems of complex polynomials」
BOSTON UNIVERSITY/KEIO UNIVERSITY
WORKSHOP 2014 Dynamical Systems,
Boston University, Boston, アメリカ
2 0 1 4 年 9 月 1 9 日 (招待講演)

Yuzuru Sato, "Random basin in dice
roll," Workshop on Theory and
Applications of Random/Non-autonomous
Dynamical Systems, Imperial College
London, London, イギリス, 2 0 1 4 年
9 月 1 1 日.

Hiroki Sumi, 「Negativity of Lyapunov
exponents of generic random dynamical

systems of complex polynomials」
Workshop on Theory and Applications of
Random/Non-autonomous Dynamical
Systems, Imperial College London (イ
ギリス) 2014年9月9日(招待講演)

Hiroki Sumi, 「Negativity of Lyapunov
exponents of generic random dynamical
systems of complex polynomials」
Holomorphic Dynamics in One and
Several Variables, Gyeongju 韓国,
2014年8月23日(招待ポスター発表)

Yuzuru Sato, "Asymmetric game dynamics
and its applications," SAET, 早稲田大
学、2014年8月19日.

Yuzuru Sato, "Random dynamical
systems approaches to noise-induced
phenomena," Workshop on Computation
and Computability in Dynamics, Trieste,
Italy, 2014年7月23日.

Yuzuru Sato, "Random dynamics from
time series of rotating fluids,"
workshop on physical origins of
correlated extreme events, Max Planck
Institute for the Physics of Complex
Systems, Dresden, Germany, 2014年
6月13日.

Mariusz Urbanski and Hiroki Sumi,
「Dimensions and measures of Julia
sets of expanding rational semigroups
with overlaps」数理解析研究所研究集会
「力学系：理論と応用の相互作用」20
14年6月10日

Yuzuru Sato, "Random dynamical
systems approaches to noise-induced
phenomena," Mini Conference on Glassy
and Complex Systems, King's College
London, London, イギリス、2014年
5月20日.

Mariusz Urbanski and Hiroki Sumi,
「Transversality family of expanding
rational semigroups and contracting
IFSs with overlaps」Spring Central
Sectional Meeting Texas Tech University,
Lubbock, TX (アメリカ) 2014年4月1
日(招待講演)

角大輝, 「ランダム複素力学系に現れる悪
魔のコロシオムのマルチフラクタル解
析」非線形・非平衡系シンポジウム II-
複雑系とエルゴード理論-早稲田大学
2014年3月13日(招待講演)

角大輝, 「ランダム複素力学系におけるラ

ンダム性誘起現象」数理解析研究所研究
集会「ランダム力学系理論とその応用」
2014年2月20日

角大輝, 「Negativity of Lyapunov
exponents in generic random dynamical
systems of complex polynomials」2013
年度冬の力学系研究集会 広島大学 20
14年1月11日

Mariusz Urbanski and Hiroki Sumi,
Transversality family of expanding
rational semigroups and contracting
IFSs with overlaps」研究集会
「Measurable and Topological Dynamical
Systems --- Keio 2013」慶応大学 20
13年12月12日

Hiroki Sumi, Negativity of Lyapunov
Exponents in Generic Random Dynamical
Systems of Complex Polynomials」京都
大学数理解析研究所研究集会「Geometry
of Moduli Space of Low Dimensional
Manifolds」2013年11月8日(招待
講演)

⑲ Yuzuru Sato, "Random dynamical systems
modeling for brain wave synchrony,"
NOLTA 2013, Santa Fe, USA, 2013年
9月10日.

⑳ Yuzuru Sato, "Computability and
Complexity of Julia Sets," NOLTA 2013,
Santa Fe, USA, 2013年9月9日.

㉑ 角大輝, 「ランダム複素力学系におけるリ
アプノフ指数の負値性と乱雑性誘起現象」
早稲田大学 研究集会「力学系・カオス・
複雑系のエルゴード論」2013年8月2
9日(招待講演)

㉒ Hiroki Sumi, 「Negativity of Lyapunov
exponents in generic random dynamical
systems of complex polynomials」PRIMA
2013, 上海、上海交通大学、2013年6月
24日(招待講演)

㉓ 角大輝, Negativity of Lyapunov
exponents of generic random dynamical
systems of complex polynomials」龍谷
大学 研究集会「複素解析的ベクトル場・
葉層構造とその周辺」2013年6月9日
(招待講演)

㉔ Yuzuru Sato, "Random dynamics from
time series," SIAM Conference on
Applications of Dynamical systems,
Snowbird, USA, 2013年5月20日
(招待講演).

⑳ 角大輝、Random complex dynamics by holomorphic families of rational functions with non-empty kernel Julia sets」2012年度冬の力学系研究集会日本大学軽井沢研修所 2013年1月12日

㉑ Genming Wang and Yuzuru Sato, "Partial Control of Chaos and Continuity of Safe Sets," contributed poster, Dynamics Days US, Denver, USA, 2013年1月4日。(招待ポスター発表)

㉒ Nobuo Matsunaga and Yuzuru Sato, "Randomness of Perturbed Dice Throw Dynamics," Dynamics Days US, Denver, USA, 2013年1月4日。(招待ポスター発表)

㉓ Hiroki Sumi, Random complex dynamics by holomorphic families of rational functions with non-empty kernel Julia sets」研究集会「複素力学系の新展開」京都大学数理解析研究所 2012年12月10日(招待講演)

㉔ Hiroki Sumi, Random complex dynamics by holomorphic families of rational functions with non-empty kernel Julia sets」研究集会「Ergodic Theory and Metric Number Theory」日本女子大学 2012年12月4日

㉕ Yuzuru Sato, Random Dynamics from a Time Series of Physiological Rhythms," NOLTA 2012, Palma de Majorca, Spain, 2012年10月24日。(招待講演)

㉖ Hiroki Sumi, 「Stability, bifurcation and classification of minimal sets in random complex dynamics」Workshop on Non-uniformly Hyperbolic and Neutral One-dimensional Dynamics, シンガポール、National University of Singapore 2012年4月25日(招待講演)

㉗ Yuzuru Sato, "Noise-induced phenomena and their applications," invited talk, Workshop on Open dynamical systems: Ergodic Theory, Probabilistic Methods and Applications, BIRS, Banff, Canada, 2012年4月11日。(招待講演)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：

種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/welcomeou-j.html>

6. 研究組織
(1) 研究代表者
角大輝 (SUMI, Hiroki)

研究者番号：40313324

(2) 研究分担者
佐藤譲 (SATO, Yuzuru)

研究者番号：30342794