

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 20 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540212

研究課題名(和文)力学系の大偏差原理とマルチフラクタル解析

研究課題名(英文)Large deviation principle and multifractal analysis in dynamical systems

研究代表者

鄭容武(Chung, Yong Moo)

広島大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20314734

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：多項式写像に代表される有界閉区間上の可微分力学系に対して、大偏差原理が成り立つための判定条件を得た。すなわち、平坦でない多峰写像力学系が、3つの性質：(1)特異値における微係数の時間発展に関する指数的大増大性；(2)特異軌道の劣指数的回帰性；(3)位相完全性を持つと、レベル2の大偏差原理が成り立つことが示された。このことから、例えば、ほとんどすべての絶対連続不変確率測度を持つ2次写像力学系に対して、大偏差原理が成り立つことがわかる。また、この2次写像力学系に対して、Birkoff平均に関するマルチフラクタル・スペクトルの熱力学形式論を用いた具体的表示を与え、その連続性を示すことができた。

研究成果の概要(英文)：We obtained a criterion to hold the large deviation principle for smooth dynamical systems on the interval. If a multimodal map without flat critical points has the following properties: (1) the exponential growth of the derivative on the set of critical values with respect to the time evolution; (2) the sub-exponential slow recurrence of the critical orbits; (3) the topological exactness, the large deviation principle of level 2 holds. From our result it is shown that almost every stochastic quadratic map satisfies the large deviation principle. Moreover we gave a representation of the Birkhoff spectrum by using thermodynamic formalism, and showed its continuity.

研究分野：力学系理論

キーワード：力学系 大偏差原理 マルチフラクタル

1. 研究開始当初の背景

確率論における大偏差原理とは、確率変数列の平均の挙動についての法則である大数の法則やその平均からの小さなずれについての法則である中心極限定理の次に考察の対象となる平均からの大きなずれについての法則である。力学系理論において確率論における大数の法則に対応する法則は、エルゴード定理ならびに SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) 測度 (あるいは絶対連続不変確率測度) の存在に関するものである。ロジスティック写像や Henon 写像など適当な双曲性を持つカオス的な可微分力学系に対して、SRB 測度が存在することはよく知られている。さらに力学系がよい混合性を持つ場合には、SRB 測度の一意性や相関関数が指数的に減衰することが確かめられ、このことから中心極限定理が導かれる。しかし、力学系の大偏差原理に関する理論は、統計力学の数学的定式化やマルチフラクタル解析など広範な応用がある重要なテーマであるにも関わらず、有限 Markov 性や一様双曲性といった強い条件を仮定した場合を除いては確立されていなかった。タワー拡大の手法を用いて非一様双曲型力学系の大偏差原理を理解しようという研究がなされ、帰還時間関数のテールが速く減衰する場合について、平衡状態の近傍の事象についての部分的な結果が幾つか知られていたが、研究開始当初、既存の結果は平衡状態から離れた事象については何の情報もあたえていなかった。その一方、研究代表者は、非一様双曲型力学系に対して、帰還時間関数のテールの減衰からは平衡状態から離れた事象に関する大偏差の評価があたえられないこと、すなわち、テールが指数的に減衰するにも関わらず大偏差原理のレート関数が決定できない反例を構成し、レート関数が決定されるための有効な判定条件を示すことができた。さらにその応用として、あるクラスの可微分力学系に対

して連続関数による Birkhoff スペクトルを変分的な方法で特徴づけることに成功していた。

2. 研究の目的

この研究の目的は、幾何学および関数解析の手法を用いて可微分力学系の大偏差原理について理解することであった。特に以下の4つの課題に取り組んだ。

- (1) 典型的かつ重要なカオス力学系に対して大偏差原理がいつ成立するのかを判定する。
- (2) 大偏差原理を中心にして熱力学形式論を展開し、レート関数を解析する。
- (3) 大偏差原理の立場から力学系の相転移現象について調べる。
- (4) 力学系の大偏差原理について得られた結果をマルチフラクタル解析に応用する。

3. 研究の方法

- (1) 国際研究集会および国内研究集会における情報収集と成果発表
- (2) 各種セミナーや勉強会を通じた国内研究者との情報交換
- (3) 研究代表者と連携研究者 (高橋博樹氏、鷲見直哉氏、三上敏夫氏) による研究打合せ
- (4) 海外研究協力者 (Sandro Vaienti 氏、Juan Rivera-Letelier 氏、Yakov Pesin 氏ほか) との情報交換と議論
- (5) 上記の活動によって得られた研究結果の統合と論文執筆

4. 研究成果

多項式写像に代表される有界閉区間上の可微分力学系に対して、大偏差原理が成り立

つための判定条件が得られた。すなわち、平坦でない多峰写像力学系が、3つの性質：

- (1) 特異値における微係数の時間発展に関する指数的大増大性；
- (2) 特異軌道の劣指数的回帰性；
- (3) 位相完全性

を持たば、レベル2の大偏差原理が成り立つことが示された。このことから、例えば、ほとんどすべての絶対連続不変確率測度を持つ2次写像力学系に対して、大偏差原理が成り立つことがわかる。また、この2次写像力学系に対して、Birkhoff平均に関するマルチフラクタル・スペクトルの熱力学形式論を用いた表示を与え、その連続性を示すことができた。この研究期間に得られた成果は、具体的に与えられた典型的なカオス力学系において、確率論の基本原則の一つである大偏差原理が成り立つことを数学的に厳密に示した最初の結果である。今後は、物理測度が存在しないような場合も含めた広い枠組みで可微分力学系における大偏差原理の成立が示されることが期待される。その上で、大偏差原理のレート関数が物理測度の存在/非存在や相転移現象にどのように関係するのかが明らかになることが望まれる。さらに、この研究を通して得られた結果が、多次元力学系やランダム力学系などにも適用できるように一般化され、カオス現象を記述する多くの数学モデルに対して、力学系の漸近挙動についての理解が大きく進展するものと思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 21 件)

1. Sumi, Naoya; Varandas, Paulo; Yamamoto, Kenichiro, Partial hyperbolicity and specification. *Proc. Amer. Math. Soc.* 144 (2016), no. 3, 1161-1170 (査読有). DOI: 10.1090/proc/12830

2. Takahasi, Hiroki, Equilibrium measures at temperature zero for Henon-like maps at the first bifurcation. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 15 (2016), no. 1, 106-124 (査読有). DOI: 10.1137/15M1015741

3. Senti, Samuel; Takahasi, Hiroki, Equilibrium measures for the Henon map at the first bifurcation: uniqueness and geometric/statistical properties. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 36 (2016), no. 1, 215-255 (査読有). DOI: 10.1017/etds.2014.61

4. Takahasi, Hiroki, Birkhoff spectrum for Henon-like maps at the first bifurcation. *Dyn. Syst.* 31 (2016), no. 1, 41-59 (査読有). DOI: 10.1080/14689367.2015.1102201

5. 鄭 容武, 2次写像力学系の統計的性質, 数理科学 626 (2015), 8月号, 20-25 (査読無). http://www.saiensu.co.jp/?page=book_details&ISBN=4910054690859&YEAR=2015

6. Sumi, Naoya; Varandas, Paulo; Yamamoto, Kenichiro, Specification and partial hyperbolicity for flows. *Dyn. Syst.* 30 (2015), no. 4, 501-524 (査読有). DOI: 10.1080/14689367.2015.1081380

7. Mikami, Toshio, Two end points marginal problem by stochastic optimal transportation. *SIAM J. Control Optim.* 53 (2015), no. 4, 2449-2461 (査読有). DOI: 10.1137/14099070X

8. 高橋 博樹, エノン写像のカオスとエルゴード理論, 数学セミナー 53 (2014), 7月号, 20-23 (査読無). <https://www.nippyco.co.jp/shop/magazine/6560.html>

9. Sakai, Kazuhiro; Sumi, Naoya; Yamamoto, Kenichiro, Ergodic measure-expansive diffeomorphisms. *Dyn. Syst.* 29 (2014), no. 4, 569-577 (査読有). DOI: 10.1080/14689367.2014.952222

10. Chung, Yong Moo; Takahasi, Hiroki, Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 34 (2014), no. 4, 1116-1141 (査読有). DOI: 10.1017/etds.2012.188

11. Sakai, Kazuhiro; Sumi, Naoya; Yamamoto, Kenichiro, Measure-expansive diffeomorphisms. *J. Math. Anal. Appl.* 414 (2014), no. 2, 546-552 (査読有). DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.01.023

12. Senti, Samuel; Takahasi, Hiroki, Equilibrium measures for the Hénon map at the first bifurcation. *Nonlinearity* 26 (2013), no. 6, 1719-1741 (査読有). DOI: 10.1088/0951-7715/26/6/1719

13. Hirayama, Michihiro; Sumi, Naoya, Hyperbolic measures with transverse intersections of stable and unstable manifolds. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 33 (2013), no. 4, 1451-1476 (査読有). DOI: 10.3934/dcds.2013.33.1451

14. 鄭 容武, カオス的な2次写像力学系のマルチフラクタル解析, 確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所講究録 1855 (2013), 56-57 (査読無). <http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/194225>

15. 高橋 博樹, カオス的な2次写像力学系の大偏差原理, 確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所講究録 1855 (2013), 58-60 (査読無). <http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/194225>

16. Mikami Toshio, Stochastic optimal transportation problem and related topics, Progress in Variational Problems: Variational Problems Interacting with Probability Theories (Kyoto, 2012), 京都大学数理解析研究所講究録 1837 (2013), 74-86 (査読無). <http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/194207>

17. Mikami, Toshio, A characterization of the Knothe-Rosenblatt processes by a convergence result. *SIAM J. Control Optim.* 50 (2012), no. 4, 1903-1920 (査読有). DOI: 10.1137/100791129

18. Chung, Yong Moo; Takahasi, Hiroki, Large deviation principle for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Comm. Math. Phys.* 315 (2012), no. 3, 803-826 (査読有). DOI: 10.1007/s00220-012-1540-x

19. Takahasi, Hiroki, Prevalent dynamics at the first bifurcation of

Hénon-like families. *Comm. Math. Phys.* 312 (2012), no. 1, 37-85 (査読有). DOI: 10.1007/s00220-012-1442-y

20. Takahasi, Hiroki, Statistical properties of nonuniformly expanding 1D maps with logarithmic singularities. *Nonlinearity* 25 (2012), no. 2, 551-567 (査読有). DOI: 10.1088/0951-7715/25/2/551

21. Takahasi, Hiroki; Wang, Qiudong, Nonuniformly expanding 1D maps with logarithmic singularities. *Nonlinearity* 25 (2012), no. 2, 533-550 (査読有). DOI: 10.1088/0951-7715/25/2/533

[学会発表](計 45 件)

1. 鄭 容武; 高橋 博樹; Juan Rivera-Letelier, 区間力学系の大偏差原理について, 2016. 3. 16. 日本数学会年会 (筑波大学)

2. Yong Moo CHUNG, Universality of the large deviation principle in one-dimensional dynamics, 2016. 3. 9. Fractal Geometry, Hyperbolic Dynamics and Thermodynamical Formalism (ICERM, Brown University, Providence, RI, USA)

3. 鄭 容武, 可微分力学系の大偏差原理について, 2016. 2. 22. 広島・岡山解析確率論セミナー (広島大学)

4. 三上 敏夫, 確率最適輸送問題とその関連する話題について, 2016. 2. 22. 広島・岡山解析確率論セミナー (広島大学)

5. 高橋 博樹, Removable of the phase transition of $1-2x^2$ on $[-1, 1]$ and thermodynamics of the Hénon map at the first bifurcation, 2016. 1. 11. 冬の力学系研究集会 (日本大学軽井沢研修所)

6. 鄭 容武, 多峰写像力学系の大偏差原理とその普遍性, 2016. 1. 10. 冬の力学系研究集会 (日本大学軽井沢研修所)

7. 鷲見 直哉, 低次元力学系におけるSRB測度の一意性について, 2016. 1. 10. 冬の力学系研究集会 (日本大学軽井沢研修所)

8. 三上 敏夫, A remark on the asymptotic behaviors of empirical distribution function, 2016. 1. 10. マルコフ過程とその周辺 (ヴェルク横須賀)

9. Naoya SUMI, On the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures for low-dimensional dynamical systems, 2015. 12. 27. Sino-Japanese Workshop on Dynamic Systems and Fractals (Yinyuan Hotel, Ningbo, China)
10. 鄭 容武, 区間力学系における大偏差原理の普遍性について, 2015. 12. 16. 確率論シンポジウム (岡山大学)
11. 高橋 博樹, Escape rate for non hyperbolic one-dimensional maps, 2015. 10. 31. 大自由度分子系における化学反応機序の理解と制御 (北海道大学)
12. 高橋 博樹, 一次元力学系の大偏差原理とその普遍性について, 2015. 10. 16. 京都力学系セミナー (京都大学)
13. 鄭 容武, 区間力学系の大偏差原理, 2015. 10. 9. Hiroshima Dynamics Day 2015 (広島大学)
14. 高橋 博樹, Large deviation principle and its universality in one-dimensional dynamics, 2015. 9. 25. 関東力学系セミナー (東京大学)
15. Hiroki TAKAHASI, Lyapunov spectrum for Henon-like maps at the first bifurcation, 2015. 8. 4. School and Conference in Dynamical Systems (ICTP, Trieste, Italy)
16. Toshio MIKAMI, Two end points boundary value problems on stochastic optimal transportation and Fokker-Planck equation, 2015.7. 10. SIAM Conference on Control and Its Applications (Maison de la Mutualit, Paris, France)
17. 高橋 博樹, ある非一様双曲的一次元写像の逃げ率公式について, 2015. 7. 1. 力学系とその諸分野への応用 (京都大学数理解析研究所)
18. Naoya SUMI, Sufficient conditions for the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures, 2015. 6. 30. The Workshop on Measurable and Topological Dynamical Systems (NIMS, Daejeon, South Korea)
19. Hiroki TAKAHASI, Escape rate formula for some non-uniformly hyperbolic one-dimensional maps, 2015. 5. 22. NCTS Workshop on Dynamical Systems, (NCTS, Taipei, Taiwan)
20. Hiroki TAKAHASI, Large deviation principle for one-dimensional maps under weak hyperbolicity assumptions, 2015. 5. 10. IMS XXV, Celebrating 25 years of low-dimensional dynamics (Stony Brook University, New York, USA)
21. 鄭 容武, A conjecture on large deviations for stadium billiards, 2015. 3. 4. Keio Dynamics Days 2015 (慶應義塾大学)
22. 高橋 博樹, 最初の分岐のエノン写像の零温度極限について, 2015. 1. 12. 冬の力学系研究集会 (日本大学軽井沢研修所)
23. 鷲見 直哉, On the uniqueness of SRB measures for diffeomorphisms of 3-dimensional manifolds, 2015. 1. 11. 冬の力学系研究集会 (日本大学軽井沢研修所)
24. 三上 敏夫, Reachability of the Fokker-Planck Equation, 2014. 12. 23. 第12回浜松偏微分方程式研究集会 (静岡大学浜松キャンパス)
25. 高橋 博樹, Equilibrium measures and zero temperature limit for the Henon map at the first bifurcation, 2014. 12. 3. エルゴード理論とその周辺 (熊本大学)
26. Hiroki TAKAHASI, Dynamics beyond uniform hyperbolicity in dimension two, 2014. 11. 18. Keio-Yonsei Workshop (慶應義塾大学)
27. 三上 敏夫, 双対定理による確率最適輸送問題の周辺分布問題への応用, 2014. 11. 13. The 9th Meeting on Probability and PDE (津田塾大学)
28. Naoya SUMI, Large deviations for partially hyperbolic dynamical systems, 2014. 8. 12. ICM2014 Satellite Conference on Dynamical Systems and Related Topics (Chungnam National University, Daejeon, South Korea)
29. Yong Moo CHUNG, Large deviation principle for multimodal maps with weak hyperbolicity, 2014. 7. 7. Limit theorems in dynamics and applications (CIRM, Marseille, France)
30. 高橋 博樹, 最初の分岐のエノン写像のリアプノフスペクトル, 2014. 6. 12. 力学系研究集会・理論と応用の相互作用

(京都大学数理解析研究所)

31. Naoya SUMI, アノソフ系から導かれたある系に対する大偏差原理, 2014. 6. 12. 力学系研究集会・理論と応用の相互作用 (京都大学数理解析研究所)

32. 鄭 容武, 非一様双曲型力学系の大偏差原理, 2014. 3. 13. 力学系セミナー 非線形・非平衡系シンポジウム II - 複雑系とエルゴード理論 - (早稲田大学染谷記念国際会館)

33. 鷺見 直哉, Large deviation for certain systems derived from Anosov, 2014. 3. 13. 非線形・非平衡系シンポジウム II - 複雑系とエルゴード理論 - (早稲田大学染谷記念国際会館)

34. 鄭 容武, 弱い双曲性をもつ多峰写像力学系の大偏差原理, 2014. 1. 10. 冬の力学系研究集会 (広島大学)

35. Yong Moo CHUNG, Large deviation principle for interval maps with weak hyperbolicity, 2013. 12. 14. Measurable and Topological Dynamical Systems (慶應義塾大学)

36. Hiroki TAKAHASI, Multifractal analysis for Henon-like maps at the first bifurcation, 2013. 12. 14. Measurable and Topological Dynamical Systems (慶應義塾大学)

37. 高橋 博樹, Prevalence of non-uniform hyperbolicity at the first bifurcation of the Henon family, 2013. 9. 25. 日本数学会秋期総合分科会 (愛媛大学)

38. Yong Moo CHUNG, Large deviation principle for chaotic dynamical systems, 2013. 6. 27. The Second Pacific Rim Mathematical Association Congress (Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China)

39. Yong Moo CHUNG, Markov towers and large deviation principle, 2013. 3. 19. Large deviations and thermodynamical formalism (EPFL, Lausanne, Switzerland)

40. 鄭 容武, 2 次写像力学系の Lebesgue 測度に関する大偏差原理, 2013. 1. 11. 冬の力学系研究集会 (日本大学軽井沢研修所)

41. Naoya SUMI, Diffeomorphisms

preserving hyperbolic SRB measures, 2012. 12. 26. ICTS Program on Recent Trends in Ergodic Theory & Dynamical Systems (The Maharaja Sayajirao University of Baroda, India)

42. 鄭 容武, カオス的な 2 次写像力学系のマルチフラクタル解析, 2012. 12. 19. 確率論シンポジウム (京都大学数理解析研究所)

43. 高橋 博樹, カオス的な 2 次写像力学系の大偏差原理, 2012. 12. 19. 確率論シンポジウム (京都大学数理解析研究所)

44. 鄭 容武, ある 2 次写像力学系のマルチフラクタル解析, 2012. 7. 10. 研究集会「力学系とその周辺分野の研究」(京都大学数理解析研究所)

45. Yong Moo CHUNG, Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps, 2012. 6. 5. School and Conference in Dynamical Systems (ICTP, Trieste, Italy)

[その他]

ホームページ等

広島大学大学院工学研究院電気電子システム数理部門数理学研究室
<http://home.hiroshima-u.ac.jp/amath/mathlab/?FrontPage>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鄭 容武 (Yong Moo CHUNG)
広島大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号: 20314734

(2) 連携研究者

高橋 博樹 (Hiroki TAKAHASI)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号: 00467440

鷺見 直哉 (Naoya SUMI)
熊本大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 50301411

三上 敏夫 (Toshio MIKAMI)
津田塾大学・学芸学部・教授
研究者番号: 70229657