

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540213

研究課題名(和文) 共形写像に関連する変分問題と metric の pullback に関する変分問題の研究

研究課題名(英文) a variational problem with respect to conformal maps and a variational problem for pullbacks of metrics

研究代表者

中内 伸光 (Nakauchi, Nobumitsu)

山口大学・理工学研究科・教授

研究者番号：50180237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：この研究課題は、リーマン多様体間の写像の共形性(等角性)を測るテンソル量のノルムの積分の停留写像(C-stationary map と呼ぶ)と、計量の pullback のノルムの積分の停留写像(symphonic map と呼ぶ)についての研究である。symphonic map に対して、正則性、構成(symphonic join と呼ぶ)、安定性などについて結果が得られた。C-stationary map に関しては、symphonic map に比べて取り扱いが非常に難しいが、安定性の部分的結果が得られている。

研究成果の概要(英文)：We give original researches on the following two maps: (1) stationary maps (we call them C-stationary maps) of the integral of the norm of a tensor which is a scale of the conformality of smooth maps between Riemannian manifolds, (2) stationary maps (we call them symphonic maps) of the integral of the norm of the pullback of metrics by smooth maps between Riemannian manifolds. We obtain results of regularity, a construction (we call it a symphonic join) and stability for symphonic maps. For C-stationary maps, we have partial results of stability, though it is considerably difficult to handle C-stationary maps.

研究分野：多様体上の変分問題

キーワード：変分問題 共形写像 等角写像 pullback symphonic map C-stationary map

1. 研究開始当初の背景

2次元曲面の場合には、曲面上の複素構造の“モジュライ空間”である Teichmüller 空間に、2つの曲面の間の擬等角写像 (quasiconformal map) を用いて、Teichmüller 距離と呼ばれる距離が導入される。2次元曲面では複素構造を共形構造 (等角構造) と見なすことができ、2つの共形構造の違いを擬等角写像で測っていることになる。さらに、近年、Tromba 等により、擬等角写像の代わりに、調和写像 (harmonic map) を用いた Teichmüller 理論へのアプローチが与えられた。

この研究課題の代表者は、共形性 (等角性) に関係する、あるテンソルに気がついた。2つのリーマン多様体 M, N に対して、 M から N へのなめらかな写像 f に対して、2階の共変テンソル $T_f = f^*h - \frac{1}{m} \|df\|^2 g$ に着目する。ここで、 f^*h は f による計量 h の pullback であり、 m は多様体 M の次元である。このテンソルが消えることと写像 f が弱共形 (weakly conformal) であることは同値であり、写像の共形性を測るテンソルである。このノルムの積分 $\Phi(f) = \int_M \|T_f\|^2 dv_g$ を考えるとき、写像の各ホモトピークラスにおいて、この汎関数 $\Phi(f)$ を最小にする写像は、そのホモトピークラスの中で共形写像に“最も近い”写像であると期待できるのではないか？このような発想から研究にとりかかった。

2. 研究の目的

上記の汎関数 $\Phi(f)$ は、

$\Phi(f) = F(f) - \frac{1}{m} E_4(f)$ と2つのパートに分解することができる。ここで、

$$F(f) = \int_M \|f^*h\|^2 dv_g$$

は計量の pullback のノルムの積分であり、

$$E_4(f) = \int_M \|df\|^4 dv_g$$

は4-エネルギー (4-調和写像のエネルギー) である。エネルギー汎関数 $\Phi(f)$ を分解して得られたエネルギー $F(f)$ と $E_4(f)$ はそれぞれが興味深い構造をもっている。4-エネルギー $E_4(f)$ については、もっと一般の p -エネルギー

$$E_p(f) = \int_M \|df\|^p dv_g \quad (p \geq 2)$$

と、その停留写像である p -調和写像 (p -harmonic map) として、すでに多くの研究がなされている。

上記の状況のもとで、この研究課題の目的は2つある：

- (1) 汎関数 $\Phi(f)$ の停留解 (C-stationary map と呼ぶ) の存在、正則性、および、性質を調べること
- (2) 汎関数 $F(f)$ の停留解 (symphonic map と呼ぶ) の存在、正則性、および、性質を調べること

Symphonic maps に比べて C-stationary maps については、その Euler-Lagrange 方程式の主要項が退化している上に楕円型ではないため、取り扱いが非常に難しい。

3. 研究の方法

研究方法は、「多様体上の変分問題」や

「大域解析学」の方法や手法をもとに、議論を行った。Euler-Lagrange 方程式の主要項が独特の退化した構造をもち、これまでにない工夫や議論が求められる。symphonic maps や C-stationary maps の概念は、研究代表者が定義した概念であり、これまでの方法を直接適用できない場合も多く、工夫やアイデアが必要となる。

4. 研究成果

この研究課題については、symphonic maps に関して、以下の様な結果が得られた：

(1)(symphonic maps の正則性) 4次元ユークリッド空間の部分領域から、 n 次元球面への symphonic maps のヘルダー連続性の結果が得られた。この結果は、symphonic maps の主要項の構造から得られたものである。

(2)(symphonic maps の構成) 2つの symphonic maps から新しい symphonic map の構成方法を与えた。(研究代表者は、これを symphonic join と呼んでいる)これは、harmonic maps に対する Smith construction に対応するものである。

(3)(symphonic maps の安定性) n 次元球面の極小部分多様体を定義域あるいは値域とする symphonic maps の安定性に関連して、いくつかの結果が得られた。第2変分公式と Bochner formula などを用いて議論している。

C-stationary maps の方は、symphonic maps に比べて取り扱いが非常に難しいが、安定性について部分的結果が得られている。今後、研究を続けていく予定である。

また、この研究課題と直接関係はないが、biharmonic maps や triharmonic maps についても、並行して研究を行っている。

biharmonic maps についての Chen 予想の部分的解決の結果が得られている。triharmonic maps についてもいくつかの結果が得られた。さらに、Willmore 曲面について、技術的観点からこの研究課題との関係があるため、2013年2月と2014年2月に Willmore 曲面の研究会を山口で開いた。

最後になりましたが、3年間の研究期間において、この研究課題の遂行をサポートしていただいた研究分担者および連携研究者の方々にお礼申し上げます。また、この研究課題に科研費を交付していただいた日本学術振興会に感謝致します。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

- (1) Nobumitsu Nakauchi, Hajime Urakawa and Sigmundur Gudmundsson, Biharmonic maps into a Riemannian manifold of non-positive curvature, *Geometriae Dedicata*, 査読有, vol.169, 2014, 263-272, DOI: 10.1007/s10711-013-9854-1.
- (2) Nobumitsu Nakauchi and Shoichiro Takakuwa, Symphonic join of maps between the spheres, *Nonlinear Analysis*, 査読有, vol.108, 2014, 87-98, DOI:10.1016/j.na.2014.05.012.
- (3) Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa, Biharmonic submanifolds in

a Riemannian manifold with non-positive curvature, Results in Mathematics, 査読有, vol.63, 2013, 467-474,
DOI: 10.1007/s00025-011-0209-7.

- (4) Shigeo Kawai and Nobumitsu Nakauchi, Weak conformality of stable stationary maps for a functional related to conformality, Differential Geometry and its Applications, 査読有, vol.31, 2013, 151-165,
DOI: 10.1016/j.difgeo.2012.11.002.

- (5) Masashi Misawa and Nobumitsu Nakauchi, A Holder continuity of minimizing symphonic maps, Nonlinear Analysis, 査読有, vol.75, 2012, 5971-5974,
DOI: 10.1016/j.na.2012.06.010.

〔学会発表〕(計2件)

- (1) Shun Maeda, Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa, Chen 予想と3重調和多様体, 2014年3月16日, 日本数学会年会, 学習院大学(東京都豊島区).
- (2) Nobumitsu Nakauchi, Variational problems for the conformality of maps and for pullback metrics, 2012年5月25日, 幾何セミナー, 九州大学(福岡県福岡市).

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)
取得状況(計0件)

〔その他〕(計2件)

- (1) 研究集会開催「多様体上の変分問題とその周辺領域 --- Willmore 曲面について ---」(第2回), 2014年2月12日から14日, 山口県健康づくりセンター(山口県山口市).
- (2) 研究集会開催「多様体上の変分問題とその周辺領域 --- Willmore 曲面について ---」(第1回), 2013年2月14日~16日, 山口県健康づくりセンター(山口県山口市).

上記2件の開催した研究集会の講演記録は、「Willmore 曲面について」という題目で, 山口大学数理科学レクチャーノートのNo.2 および No.3 として刊行した.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中内 伸光(Nakauchi, Nobumitsu)
山口大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 50180237

(2) 研究分担者

内藤 博夫(Naitoh, Hiroo)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10127772

(3) 連携研究者

河合 茂生(Kawai, Shigeo)
佐賀大学・文化教育学部・教授
研究者番号: 30186043

高桑 昇一郎(Takakuwa, Shoichiro)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10183435

