

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540214

研究課題名(和文)フォンノイマン環, 自由確率論, 非可換関数空間の研究

研究課題名(英文) Study on von Neumann algebras, free probability and non-commutative function spaces

研究代表者

植田 好道 (UEDA, Yoshimichi)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：00314724

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：フォンノイマン環の自由積の構造を様々な観点から明らかにした。ある種の制約条件の下で具体的なフォンノイマン環と同一視する成果から、普遍量の計算。さらには部分環の位置に関する剛性及び自由積分解の一意性に関する結果を得た。軌道自由エントロピーに関する研究を展開し、非自明な計算結果及び統計物理学に動機付けられ対応する圧力の概念を導入し、ランダム行列との関係を論じた。さらに、軌道自由エントロピーの定義を一般化し、その一般論を論じた。他に、フォンノイマン環の前共役が一樣凸性と真逆の強い性質をいつ持つかを調べた。

研究成果の概要(英文)：I clarified the structure of free product von Neumann algebras from various viewpoints. Especially, I identified the resulting free product von Neumann algebras with a certain explicit one under some conditions. Also, we computed several invariants for free product von Neumann algebras in the general setup, and obtained a result on the positional rigidity for subalgebras as well as a uniqueness result for the free product decomposition. I studied the orbital free entropy. In particular, we made some nontrivial computation of it. We also introduced the concept of pressure related to the orbital free entropy motivated by statistical physics and investigated its relation to random matrices. Moreover, I generalized the previous definition of orbital free entropy and discussed its general properties. Finally, we studied von Neumann algebra preduals and investigated a strong property, which is rather opposite to uniform convexity, for them.

研究分野：作用素環論

キーワード：フォンノイマン環 自由積 軌道自由エントロピー 前共役

1. 研究開始当初の背景

研究課題「自由確率論と作用素環論の研究」(2008-2011)において私はフォンノイマン環の自由積を技術的な条件を一切仮定することなく研究する端緒を開いた。なお、数年前より deformation/rigidity 理論と呼ばれるフォンノイマン環の構造解析理論が台頭し、作用素環研究に一種の革命を起こしていた。さらに、2009 年度に出版された日合氏と宮本氏との共著論文で自由エントロピーの軌道アプローチなるものを提案し、幾つかの非公表の研究成果を得ていた。この方向は主にフランスの力のある確率論研究者らも参入し、それまでの作用素環研究とは随分と趣の違う発展を見せていた。さらに、有界ハーディ空間のパナッハ空間的研究も始めていた。

2. 研究の目的

フォンノイマン環の自由積(及びその仲間)の一般的な構造解析, 自由エントロピー理論の更なる進展, 及び, 作用素環を基礎に定式化される非可換関数空間のパナッハ空間論的研究が目的であった。

3. 研究の方法

一般的な数学研究, すなわち, 極めて地道に研究を進めた。なお, 世界の競合する研究者らと共同し, 研究を進めた。そのために研究資金を用いた。特別な設備等は一切使っていない。

4. 研究成果

(1) 私がフォンノイマン環の自由積の研究を始めたのは古く, 1995 年頃であったが, その直後に発表された Dykema 氏の実績は有用なものである。それは, 有限次元環を含むある制限されたクラスに入るフォンノイマン環同士の自由積の構造を「半分」明らかにしたものであり, 応用上極めて重要な成果であった。しかし, その証明は多重の帰納法に基づくものであり, 極めて見通しが悪いもので(証明が複雑故に誰も気づいていないようだ)難点もある。さらに幾つかの人工的な条件も必要で, 当初からこの理論をより一般の枠組みで再構成することを狙っていた。今回, これに挑戦し, 期待される最強の結果を証明した。また証明も極めて見通しの良いものになった。具体的には, ある一般的なクラスに入るフォンノイマン環同士の自由積で得られる III 型因子環の離散分解に現れる II 型部分(離散核と呼ばれる)が無限生成自由群の正則表現から得られる II₁ 型因子環を膨らませたものであることを証明した。すなわち, 離散分解の「半分」を完全に決定したことになる。残り「半分」はある種の離散核への可換離散群作用の分類で, 今後の研究に委ねられる。

(2) 軌道自由エントロピーに関するそれぞ

れ泉氏, 日合氏との共著論文を発表した。ともに以前にある程度研究を進め放置していたものを深化完成させたものである。具体的には, 泉氏との共著論文で, 二つの射影の場合の軌道自由エントロピーを計算した。これは Loewner 方程式が現れる複素解析的な議論と自由確率論的議論が合わさった仕事である。日合氏との共著論文では軌道自由エントロピーに対応する圧力の概念を導入し, Guionnet 氏らにより行われたランダム行列の研究との関連を調べた。他方で, 私一人の研究として Biane 氏と Dabrowski 氏により行われた研究に刺激を受け, 軌道自由エントロピーの定義を再検討し, 技術的な仮定を落とし, とりあえずの最終版というべき定義を与え, その一般論を論じた。他に非公表の仕事があるが, これは次の挑戦的萌芽研究につなげることにし, 最近発表された仕事に関して限定的な人にだけそのノートを送るに止めてある。

(3) パナッハ空間論の研究者の Martin 氏から問い合わせを受け, 非可換 L₁ 空間に当たるフォンノイマン環の前共役の研究を行った。一様凸性に真逆の極めて強い性質を論じ, それが成り立つための条件などを調べ, 一般的な結果を得た。なお, Martin 氏らの以前の仕事の難点を補完する意味を持つ。

(4) フォンノイマン環の自由積がいつでも完全性という非常に強い非可換性を持つことは以前の私の研究で明らかになっていたが, 得られたフォンノイマン環が III₁ 型因子環になるときにその連続核と呼ばれる II_∞ 型因子環が同様に完全性を持つか否かははっきりわかっていなかった。実際, 完全性を持ったり持たなかったりすることはわかっていた。この現象は実数群作用に深く関連し, 実数群作用に長けた戸松氏と共同でこの現象を詳しく調べ, 完全になるための必要十分条件を得た。我々が得た定理は(主張に何らかの修正があるかもしれない)より一般の設定で成立すると信じていてそれは今後の興味深い課題である。しかし, この仕事に類似の研究成果はなく, 先駆的な成果であると信じる。

(6) フォンノイマン環の自由積に対する Boutonnet 氏, Houdayer 氏, Raum 氏の仕事を補う研究をした。さらにフォンノイマン環の自由積で得られる III₁ 型因子環に対していつでも Connes の bicentralizer 予想が成り立つことを確認した。後者と上述の戸松氏との共同研究でフォンノイマン環の自由積に対して一般的な普遍量を明らかにする試みが完成したと言える。

(7) 少し前に発表された Houdayer 氏のフォンノイマン環の自由積に関するある定理から技術的な仮定を取り除くのを試みて成

功した。Houdayer 氏と連絡を取り，双方で持っている技術を持ち合い私が培ってきたフォンノイマン環の自由積研究の様々な技術と deformation/rigidity 理論の技術を活用した共同研究を実施し，最終的な一般化を得た．具体的にはフォンノイマン環の自由積の可換性の強い部分環の位置の同定で，Popa 氏の 80 年代初頭の成果を極限まで一般化したものを証明した．さらに，この共同研究で培った様々な技術を活用し，現時点で期待される最強の Kurosh 型定理を証明した．これは小沢氏の先駆的な仕事や Ioana 氏，Peterson 氏と Popa 氏の仕事を含みフォンノイマン環の型によらない一般化であり，フォンノイマン環の設定で自由積分解の一意性を示すものである．

以上の成果が示すようにフォンノイマン環の自由積に関して極めて様々なことが極めて一般的な枠組みで明らかになった．また，軌道自由エントロピーの研究も着実に進んでいる．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

Yoshimichi Ueda, Some analysis on amalgamated free products of von Neumann algebras in non-tracial setup. J. London Math. Soc., Vol.88, No.1 (2013), 25--48.

Yoshimichi Ueda, Discrete cores of type III free product factors. Amer. J. Math., Vol.138, No.2 (2016), 367--394.

Miguel Martin and Yoshimichi Ueda, On the geometry of von Neumann algebra preduals. Positivity, Vol.18, No.3 (2014), 519--530.

Yoshimichi Ueda, Orbital free entropy, revisited. Indiana Univ. Math. J., Vol.63, No.2 (2014), 551--577.

Masaki Izumi and Yoshimichi Ueda, Remarks on free mutual information and orbital free entropy. Nagoya Math. J., 220 (2015), 45--66.

Fumio Hiai and Yoshimichi Ueda, Orbital free pressure and its Legendre transform. Comm. Math. Phys., Vol.334, No.1 (2015), 275--300.

Yoshimichi Ueda, Absence of Cartan subalgebras in continuous cores of free product von Neumann algebras. Proc.

Japan Acad. Ser. A., Vol.90, No.10 (2014), 151--155.

Reiji Tomatsu and Yoshimichi Ueda, A characterization of the fullness of continuous cores of type III₁ free product factors. Kyoto J. Math., to appear.

Cyril Houdayer and Yoshimichi Ueda, Asymptotic structure of free product von Neumann algebras. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., to appear.

Cyril Houdayer and Yoshimichi Ueda, Rigidity of free product von Neumann algebras. Compositio Math., to appear.

[学会発表](計 7 件)

植田好道, Remarks on von Neumann algebra preduals, RIMS 共同研究「量子化と作用素環」, RIMS, 2/4/2013.

Yoshimichi Ueda, Free product von Neumann algebras with emphasis on structure theory for type III factors. Workshop on Operator Algebras. The university of Tokyo, 5/10--12/2013.

Yoshimichi Ueda, Orbital free entropy. AMS-RMS joint meeting, Special session: Random matrices and free probability, "1 Decembrie 1918" University of Alba Iulia. Romania, 6/26--30/2013.

Yoshimichi Ueda, Orbital free entropy and its dimension counterpart. Workshop on analytic, stochastic, and operator algebraic aspects of noncommutative distributions and free probability in Focus program on noncommutative distributions in free probability, Fields Institute, Canada 7/22--26/2013.

Yoshimichi Ueda, Orbital free entropy and its Legendre transform approach. Free probability and the large N limit, IV, Berkeley, 3/25--29, 2014.

Yoshimichi Ueda, Discrete cores of type III free product factors. RIMS 研究集会「作用素環論の最近の進展」, RIMS, 9/8--10, 2014.

植田好道, フォンノイマン環の自由積に関する総合報告. RIMS 共同研究「作用素環の分類理論とその周辺」, RIMS, Feb. 2--4, 2015.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況（計 0 件）

取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ueda/index.html>

6．研究組織

(1)研究代表者

植田 好道 (UEDA, Yoshimichi)

九州大学大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：00314724