様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２７　年　　６　月　　４　日現在

機関番号： １２６０８
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４５４０２６０

研究課題名（和文） ゲージ理論における厳密計算を用いた双対性の研究

研究課題名（英文） Research in dualities using exact results in gauge theories

研究代表者
今村　洋介（Imamura, Yosuke）

東京工業大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：８０３２３４９２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：素粒子論において、素粒子間の相互作用が系の振る舞いにどのように影響するかを理解することが重要である。特に、相互作用が強い場合には一般的な処方は知られておらず、理論ごとにその特徴に応じた取り扱いが必要となる。超対称性、すなわちボソンとフェルミオンの間の対称性がある理論においては、強結合であってもいくつかの物理量を厳密に計算する局所化と呼ばれる処方が知られている。本研究課題では3次元や5次元のいくつかの時空において分配関数を厳密に与える公式を導出し、いくつかの理論の間の双対性（見かけが全く異なる理論であっても物理的に等価であるという現象）を確認することなどに成功した。

研究成果の概要（英文）：In particle physics it is important to understand how the interactions among particles affect the behavior of the system. When the interactions are strong no general prescription to handle them are known, and we should use different methods depending on the problems. For theories with supersymmetry (symmetry between bosons and fermions) we can calculate some observables exactly by using ``localization method.'' In this research I found some new formulae of the partition functions of three- and five-dimensional gauge theories in some backgrounds, and succeeded in confirming some dualities (Equivalence of two theories that look different from each other).

研究分野： 素粒子論

キーワード： ゲージ理論　双対性　超対称性　局所化法

１．研究開始当初の背景

今日の素粒子論において、素粒子の間の相互作用はゲージ理論を用いて記述され、ゲージ理論の性質を理解することは今日の素粒子論の主要な目標の一つである。ゲージ理論は、電磁場を記述するマクスウェルの電磁気学と、その一般化であるヤン・ミルズ理論を含む。これらゲージ理論の相互作用の強さは「結合定数」と呼ばれるパラメータによって表される。弱結合の場合、すなわち結合定数が小さい場合には、結合定数が 0 である場合をまず考え、そこに結合定数の各べきの効果を加えていくことでさまざまな計算が可能となる。このような手法は摂動論と呼ばれている。

しかし、ゲージ理論のダイナミクスを理解するうえで、弱結合のみならず強結合領域の現象を理解することは重要である。例えば、双対性、すなわち、全くことなるラグランジアンによって記述される系が物理的に等価になる現象は強結合の理論に固有のものである。（正確には、片方の理論が弱結合であればもう片方の理論は多くの場合強結合となる。）

しかし、強結合の場合には摂動論の手法を用いることができない。そんな中、2007 年に Pestun [arXiv:0712.2824] は 4 次元球面 S^4 の上に定義されたある種の超対称ゲージ理論の分配関数が、超対称性をうまく用いることで結合定数の強弱によらず計算可能であることを示した。また、その後、Kapustin, Willett, Yaakov [JHEP 1003:089,2010] は同様の手法を 3 次元球面 S^3 上の 3 次元ゲージ理論にも適用し、その手法が特殊な例にだけ適用できるものではなく、次元や背景時空の細かい構造が違っても適用可能な、応用範囲の広いものであることを示した。この手法は「局所化」と呼ばれる。本研究課題の一つの目的は、この局所化を用いてゲージ理論の解析を行おうというものである。

ゲージ理論はさまざまな次元において定義することができるが、近年、その中でも M 理論との関係によって特に注目されているのが 3 次元および 5 次元のゲージ理論である。M 理論とは、弦理論の強結合領域を表すと考えられている 11 次元の理論であるが、いまだその構成的定義は与えられていない。その一つの理由は M 理論に含まれると考えられている M2 ブレーンと M5 ブレーンの詳細な性質に不明な点が多いためである。M2 ブレーンと M5 ブレーンはそれぞれ（時間方向も含めると）3 次元と 6 次元の広がりを持ったオブジェクトであり、それらの上には 3 次元や 6 次元の理論が存在していると考えられている。M2 ブレーンに対しては Aharony, Bergman, Jafferis, Maldacena [JHEP 0810:091,2008] らによって提案された ABJM モデルがブレーン上の 3 次元の理論を記述すると考えられている。M5-ブレーン上の 6 次元理論についてはいくつかの理由から局所的な場の理論を用いた記述が不可能かもしれないと考えられており、直接 6 次元の理論を扱う変わりに、一つの次元を丸めて得られる 5 次元の理論（こちらはゲージ理論による記述が可能であると考えられている）を解析することで間接的に 6 次元の情報を得るという手法がしばしば取られる。

このように、研究開始当初は、M ブレーンと関係する 3 次元および 5 次元の理論を調べることが重要な課題であり、その手法として局所化法が有効であろうと考えられていた。

２．研究の目的

１に記述した背景の中で、M ブレーンと関係する理論、特に M2 ブレーンと関係する 3 次元理論について、局所化の手法を用いて詳しく調べていこうというのが当初の目標であった。M2 ブレーンが平坦な背景時空上に置かれた平坦なブレーンである場合、その上の理論は上記の ABJM 理論によって与えることができる。しかし背景時空はブレーンそのものの形状を変化させることによって、3 次元の理論やそれが定義される時空が変化する。M 理論は重力を含む理論であるから、このような背景時空の構造を変形させることは自然な操作であり、そのような一般化を行った理論について詳しく調べることは、理論の詳細な情報を得る上で重要である。本研究課題において最初に取り掛かったのは、3 次元球面 S^3 をその対称性の部分群で割ったオービフォールド S^3/Z_n の上で定義された理論の分配関数の計算である。このオービフォールドがそれまでに考えられていた背景時空と異なるのは、その基本群が Z_n であり、それに伴ってその上のゲージ場配位の位相的構造に複数の可能性が表れるという点である。実際この性質のために、以下の４で述べるような面白い結果が得られた。

本研究開始段階では、3 次元の理論の背景時空を変化させること、そして理論の構造を変化させることの両方の一般化を調べる予定であった。後者は M2 ブレーンが置かれている背景の時空の構造を変化させることに対応する。しかし、ここ数年の間に M5 ブレーンに関する研究成果が多くの研究グループから発表され、その重要性が高まってきたため、5 次元のゲージ理論についての研究も開始した。特に、局所化を用いた分配関数の厳密計算を行うこと、そしてそれを行うのに必要となる超対称性を持つ背景時空を構成することなどを目的とした。

３．研究の方法

一般に、場の理論の研究において、摂動論（相互作用の無い場合から出発して、相互作用の影響が小さいとしてその影響を近似的

に取り入れていく手法）は有用な計算手法であるが、本研究課題が対象とするのは主に強結合の場の理論であり、その解析には摂動論を用いることができない。そのため、理論が持つ超対称性に関する局所化法によって、摂動論によることなく物理量を厳密に計算する方法を用いた。この手法を用いることで、場の理論における経路積分（場の全ての配位に対する足し上げであり、無限次元の積分である）を、無限個のガウス積分と有限個の非自明な積分の組み合わせに書き換えることが可能となり、厳密な分配関数を有限次元積分の形で書き下すことができる。ただし、分配関数の計算一般において言えることであるが、この方法では全体の符号因子まで決定することはできない。この因子は通常は期待値の計算には利いてこないので重要ではないが、いくつかの寄与を足し挙げる際には注意深くこの因子を選ぶ必要がある。私はこの因子を決定するのに双対性を用いたものと、因子化を用いたものの二つの方法で調べた。

局所化によって分配関数を計算し、理論が持つ情報を少しでも多く引き出すには、背景時空をできるだけ多くのパラメータで変形し、分配関数がそれらにどのように依存するかを調べるのがよい。特に本研究では、5 次元のゲージ理論を調べる際に歪んだ S^5（5 次元球面）の上での分配関数を計算し、そのパラメータ依存性を決定した。

さらに、より一般の背景上で超対称性をもつ 5 次元理論の構成を効率よく行うために、5 次元の超重力理論を用いた背景時空の構成を行った。超重力理論にはさまざまな種類があるが、その中でも私は Kugo-Ohashi によって構成された 5 次元のポアンカレ超重力理論を用いた。

４．研究成果

3 次元のゲージ理論に関して

本研究の初期段階では、3 次元の時空の上の理論に注目し、特に S^3/Z_n（S^3 をその対称性の離散部分群で割ったオービフォールド）上の理論について詳しく調べた。このようなオービフォールドの操作は場に対しては射影として振舞うので、そのうえの分配関数を計算するにはもともとの多様体（ここでの例では 3 次元球面 S3）の上のモードの寄与のうち、オービフォールドで残るモードの寄与のみを取り出せばよいと期待される。しかし私は横山氏との共著論文（以下論文リストの[5]）において、そのような単純な方法で得られた分配関数はそれまでに知られている双対性と矛盾することを発見した。すなわち、互いに双対であると考えられる理論の分配関数を上記の方法で計算してみると、異なる分配関数が得られたのである。これはもともと期待していなかった予想外の結果であったため、論文[5]においてはさらにそのずれの詳細について研究した。その結果、オービフォールドの分配関数の計算の際に非自明な符号因子を導入することにすれば、互いに双対な理論の分配関数は一致することが示された。

この符号因子の役割についてさらに深く調べるため、[2]においては因子化と呼ばれる現象との関係について詳しく調べた。因子化とは S^3 や S^2xS^1 上の分配関数がある二つの因子の積として与えられるという現象であり、これは S^3 と S^2xS^1 の両方が D^2xS^1 という同じ図形二つの貼りあわせによって与えられることに関係している。実はオービフォールド S^3/Z_n も同様に D^2xS^1 を二つ張り合わせることによって構成できるため、そのような因子化が起こると期待されていた。私はまず簡単な理論の分配関数においてこのような因子化が実際に起こることを確認し、そして符号因子が必要となるゲージ理論の場合には、非自明な符号因子を導入して初めてこのような因子化が可能であることをいくつかの例で確認した、言い換えると、因子化が起こることを指導原理として符号因子を決定することができるということである。[5]における解析では、符号因子の決定に双対性を用いたため、双対性の知られていない理論に対しては適用することができなかったが、因子化はどのような理論においても成り立つと考えられるため、この方法は大きな利点を持つ。

5 次元のゲージ理論に関して

発表論文[4]および[3]は歪んだ 5 次元球面 S^5 の上のゲージ理論について解析したものである。まず、[4]においては、すでに知られていた丸い（歪んでいない）5 次元球面上のゲージ理論のラグランジアンが、球面をゆがめたときにどのような変形を受けるかについて解析したものである。[4]においては歪んだ球面上の理論を構成するために、丸い 5 次元球面と直線 R の直積として与えられる 6 次元空間を考え、R 方向をコンパクト化して 5 次元理論を構成する際にひねりを導入することで曲がった S^5 上の超対称変換を構成し、その超対称性で不変になるようにラグランジアンの形を決めていった。(6 次元のラグランジアンから直接 5 次元のラグランジアンを構成しないのは、このようなコンパクト化の手法では得ることができないラグランジアンが存在するからである。）その際、（計算をし易くするために）歪んだ S^5 に対して SU(3) 対称性を要請すると、超対称性の導入の方法に関して、物理的に異なる二つの方法があることを発見した。また、その背景上で古典的な作用を計算し、二つの変形方法のうち片方については作用が変形パラメータに依存し、もう片方については作用が変形パラメータに依存しないことを発見した。この結果は以前私が指摘した歪んだ S^3 の場合の状況にきわめて類似している。そのため、このことを踏まえ、この性質は量子論的にも保た

れるであろうと予想した。
　この予想を検証するために、[3]においては局所化法を用いて分配関数の計算を行い、その予想が正しいことを確認した。それだけではなく、SU(3)対称性を仮定しない、より広いクラスの歪んだ S^5 に対して、その分配関数の一般形を与えた。ただし、ここでの計算はインスタントンと呼ばれるソリトン的配位の寄与を含まないものである。（インスタントンの寄与に関しては、後に別の研究グループによって与えられた。）
　超対称性を持つ 5 次元の多様体は 5 次元球面だけではない。5 次元の理論に対してより多くの情報を得るためには、より広いクラスの背景時空を構成することが望ましい。そこで私は[1]において 5 次元超重力理論を用いた背景時空の構成を行った。そこでは複数ある 5 次元の超重力理論の中から Kugo-Ohashi によって構成された超重力理論を選択し、そこに含まれる場を背景場として扱い、それら背景場が超対称変換のパラメータとなるキリングスピノルの存在を許すという条件をとくことによって、背景時空の一般解を得た。得られた解はある一つの方向に対するシフトのもとで不変になっており、残り４つの方向に対しては任意の構造をとることができることを示した。すなわち、解は関数の自由度を持っており、無限個のパラメータによる変形を行うことができることを示したのである。したがってこの解は特殊な場合として非常に多くの例を含んでいる。実際、それまで知られていた例のうち、S^5，S^3xΣ（Σは任意の 2 次元曲面）などを簡単に再現することができた。また、S^4xR も特殊な例として含まれるが、それまでに知られていた S^4xR とはあるゲージ場の配位が異なっており、新しい解である。すでに知られていた S^4xR は[1]において構成された解には含まれていなかったが、それは出発点とした超重力理論の選び方のせいであり、共形超重力理論を用いれば S^4xR まで含むより広いクラスの解が得られるであろうと予想した。（これはその後他のグループによって確かめられた。）

　曲がった時空において超対称性を構成するためには、上で述べたように超重力理論を用いる必要があるが、超重力理論はきわめて複雑であり、その定式化の努力は現在でも続いている。そこで超重力理論に関するいくつかの話題について議論するために、2015 年 2 月 20 日（金）に東京工業大学において「超重力理論についての小規模研究会」を開催し、3 人の方に講演をしていただいた。そこで発表された内容は、超対称性を持つ背景時空の構成に密接に関係するものであり、本研究課題と密接に関係している。本研究課題の成果を今後生かしていくために大変参考になるものであった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

[1]
"Supersymmetric backgrounds from 5d N=1 supergravity," Yosuke Imamura, Hiroki Matsuno, JHEP07(2014)055, DOI: 10.1007/JHEP07(2014)055, 査読有
[2]
"Factorization of S^3/Z_n partition function," Yosuke Imamura, Hiroki Matsuno, Daisuke Yokoyama, Phys.Rev. D89 (2014) 085003, DOI: 10.1103/PhysRevD.89.085003, 査読有
[3]
"Perturbative partition function for a squashed S^5," Yosuke Imamura, Prog. Theor. Exp. Phys. (2013) 073B01, DOI: 10.1093/ptep/ptt044, 査読有
[4]
"Supersymmetric theories on squashed five-sphere," Yosuke Imamura, Prog. Theor. Exp. Phys. (2013) 013B04 DOI: 10.1093/ptep/pts052, 査読有
[5]
"S^3/Z_n partition function and dualities," Yosuke Imamura, Daisuke Yokoyama, JHEP 1211 (2012) 122, DOI: 10.1103/PhysRevD.89.085003, 査読有

〔学会発表〕（計 0 件）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
開催した研究会に関するホームページ
http://www.th.phys.titech.ac.jp/~imamura/sugraws/sugraws.html

６．研究組織
(1)研究代表者

　今村 洋介　（IMAMURA Yosuke）
　東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
　研究者番号：80323492

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし