

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 19 日現在

機関番号：26402

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540412

研究課題名(和文)量子グラフにおける特異節点の数理

研究課題名(英文)Mathematical physics of singular vertices in quantum graphs

研究代表者

全 卓樹 (Zen, Takuju)

高知工科大学・環境理工学群・教授

研究者番号：60227353

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：一次元量子可解系であり、単電子デバイスの数学的モデルでもある「量子グラフ理論」にあつて、量子グラフの素要素である「特異節点」の散乱行列の数理的解析と分類を行い、それが含意する物理的性質の解明を行った。その過程でモジュラー交換対称性を持つユニタリーかつエルミートな行列の数学的特徴づけと分類、具体的な構成法について、幾つかの定理を発見した。応用として、外場によって制御可能な量子流束を持つ量子グラフによる「量子フィルター」のモデルを考案した。

研究成果の概要(英文)：We have studied the singular vertex of quantum graphs, which is the basic building block in quantum graph theory. We have performed its mathematical analysis and classification and its physical characterization. In the process, we have established several theorems concerning the modularly permutation symmetric unitary Hermitian matrices. As an application, we have found a model of controllable quantum filter based on quantum graph theory.

研究分野：数理物理・物性基礎

キーワード：数理物理 量子グラフ 量子フィルター 量子異常 量子素子

1. 研究開始当初の背景

量子グラフ理論とは、一次元直線と節点からなるグラフ上に住まう量子粒子の力学を扱う理論である。量子グラフは歴史的に言えば、量子化学の初期に有機分子の近似理論として登場したもののだが、近年は量子細線を結合した近未来の単電子素子の数学的モデルとして注目を集め始めている。量子グラフの中心に座しているのが節点である。その特異性から、量子グラフの節点の取り扱いには数学的な注意を要する。n本の直線を接合したn次の特異節点がU(n)群を構成するn²のパラメータで記述されることは十年ほど前から知られていたが、従来の研究ではこの内ももっとも簡単かつ実現可能と考えられる「デルタ型節点」のみが考慮され、この節点を複数組み合わせ合わせて、如何に興味深い特性を持つグラフを作るかに興味が集中していた。

筆者は論文 [1] において、一般的な特異節点を $n(n+1)/2$ 個の内線を持つデルタ節点型グラフの微小サイズ極限として構成する手法を発見した。これによって従来より多様な節点をもつ量子グラフが、実験的に実現可能な現実的な系と考えられるのと同時に、一つの特異節点だけをもつ「星状量子グラフ」が、それ自体で興味の対象となってきた。n次の特異節点を持つ星状量子グラフの逆散乱問題は $n \times n$ 次行列の逆問題として可解である。それ故、ある要求された性質の散乱行列を持つ量子グラフを求めると、まずそのような性質もつ星状量子グラフを求め、それを近似する有限グラフを構成するという手順が確立した事になる。すなわち、量子素子として有用な性質を持つ量子グラフを、実験的に実現可能なモデルとして構築する、ということが可能になっていたわけである。

〔参考文献〕

[1] T. Cheon, P. Exner, O. Turek, Approximation of a general singular vertex coupling in quantum graphs, Ann. Phys. (NY) **325** (2010) 548-578

2. 研究の目的

本研究では、量子グラフの素要素である「特異節点」の数理的特性の解明によって、指定した特性を持つ量子グラフの構成法の一般論を作り上げ、近未来の単電子素子の基礎理論へと育てあげる事を目標とした。

一つの特異節点とそこから出る有限個の端子からなる量子グラフを「星状量子グラフ」と呼ぶ。本研究においては「星状量子グラフにはどのような散乱行列が許されるか」、「達成可能な散乱行列をもつ星状グラフをどのように分類するか」、そして「そのような分

類の下でいかなる有用な量子グラフのモデルを考えることができるか」という三つの探求である。

3. 研究の方法

特性を指定した量子グラフを特異節点の結合を通じて構成しようとする場合、我々が直面したのはnが一般の場合の特異節点を記述する散乱行列であるn次元の正方行列の持つパラメータ空間の広大さである。これは星状量子グラフに多様な物理的特性を与える源泉である一方、その解析に技術的な困難をもたらす。n次特異節点の完全な数理解析は手に余るものであった以上、なんらかの制限は不可避である。我々はまず、考察の対象をスケール不変な「フロップ=筒井型」に制限した。これは散乱行列が一般に持つユニタリー性に加えて、エルミート性を要求することに相当する。さらに我々は「どの端子も物理的に類似の性質を持つ」とする対称性に基づく制限を選んだ。ここで端子の交換に対して完全な対称性を要求すると制約が強すぎるので、各端子への透過率が等しい星状量子グラフを考えた。これを記述するユニタリーでエルミートな散乱行列は、対角要素は符号を除いてすべて等しい値を持ち、非対角要素は位相を除いてすべて等しい値を持つという「モデュラー交換対称性」を持つことになる。

我々の探求においては更に、有用な具体例からの出発が不可欠であった。起点となったのが「量子フィルター」という考え方である。n = 2の量子グラフ、すなわち点状欠陥のある直線上の量子力学で夙に知られていた通り、ある種の特異節点は、端子の一つから粒子を入射すると、その粒子の波数に応じて反射及び他の端子への透過のパターンを変えするという特性を持つ。すなわち入射エネルギーによって主に透過する端子を変化させる「スペクトル・フィルター」として機能する星状量子グラフが存在するのである。すると入射エネルギーを固定しても、どれかの端子に外場をかけることで実効波数を変化させ、それによって散乱パターンを変化させることができるのではないかと、これが「制御可能な量子フィルター」考え方である。

このようにして本研究の具体的な方針が

- A) 「交換対称な透過確率」をもつ量子節点の理論を作る
- B) スペクトル分岐フィルターについての総合的な一般理論を創りあげる
- C) マクロな外場で性質を制御できる新タイプの量子グラフを探求する

と定まった。

4. 研究成果

本研究の成果を年度毎にまとめると次のようである。

平成 24 年度

量子グラフを用いたスペクトル・フィルターとして、外部からの電圧印加による制御が可能なものを考案した。これは、量子散乱の一般論ではよく知られている「閾値共鳴散乱」現象を利用することで達成された。

1. 端子 3 本が一節点で交わる星状グラフの一端子(3 とする)に一定値ポテンシャルを加え、残る二端子(1 および 2)間の透過が極めて小さいようなフロップ = 筒井型節点結合を選ぶ。端子 1 より入射した量子粒子は、殆どの入射エネルギーでほぼ全反射、ないしは反射と 3 への透過の組み合わせになるが、入射エネルギーがポテンシャルに等しい値の近辺でのみ「閾値共鳴」現象によって、1 から 2 への完全透過となる事を解析的計算により発見した。

2. 端子 4 本が一節点で交わる星状グラフの四端子(1, 2, 3, 4 とする)のうちで 1 から 2 への透過が極めて小さく 3, 4 への透過が大きいフロップ = 筒井型節点結合の存在を示した。この端子 3 に一定ポテンシャルを加えた系を考えると、端子 1 から 2 への透過は、入射エネルギーがポテンシャルに等しい値の近辺まで一定(最大で 1/4 の透過率)で、ポテンシャル・エネルギーの値を超えると急速にゼロになる事を見出した。ここで端子 4 は一種のドレインとして働いている。

平成 25 年度

1. 量子グラフを用いたスペクトル・フィルターのうちで、エネルギー閾値を超えた側でフラットな透過特性を持つものの一般型を発見した。これは前年度に発見した端子数 $n=4$ の特異節点のある星形グラフを $n>4$ の任意の端子数に一般化したものである。この問題が、散乱行列としてエルミートかつユニタリーな $n \times n$ の正方行列で全ての非対角要素の絶対値が等しく、自明な単位行列を除いて最も多く 0 の要素を持つものを探す数学的問題に帰着できる事を示し、実際にそのようなものが n 偶数では $(n-2)/2$ 個の複素パラメータ、 n 奇数では $(n-1)/2$ 個の複素パラメータをもって構成できることを、具体的処方とともに示した。

2. 端子数 $n=4$ の特異節点を持つ量子グラフで、特異節点の特性を支配するパラメータを連続的に変える事で全体がひと繋がり、または 2 つに分離した線からなるトポロジカルに異なる形状を滑らかに結びつける事が出来る事を示した。そしてそのようなパラメータの変化で異なった形状を経過してもとの方に戻るループを作り、そのループの上で

の量子グラフのスペクトル構造の変化を調べたところ、パラメータの周回後、エネルギー順位が入れ替わる、いわゆるエキゾチックな量子ホロノミー現象が存在する事を見出した。

平成 26 年度

1. 量子グラフ特異節点でのスケール不変な散乱行列の中で、端子の交換に対してモジュラー対称なもの、すなわち、散乱振幅の絶対値が交換対称なものを考えて、その物理的特性を詳細に調べた。それが「自由接続」条件から「無反射等透過」なものに至るあらゆる接続条件の領域を滑らかにつないで記述する事を見出し、分類し、その物理的性質を調べた。

2. 上記交換対象なスケール不変な特異節点を記述する、エルミートかつユニタリーでモジュラー交換対称な次数 n の正方行列を特徴付ける量として、行列の対角要素と非対角要素の大きさの比 d 、対角要素中の正であるものの数 m の二つが存する事を示し、このサブクラスが $d=1$ 、 $d=0$ の特殊な場合としてそれぞれアダマール行列、カンファレンス行列を含む事を見出した。モジュラー交換対称なユニタリーかつエルミートな行列が、次数 n を定めたときいかなる d で存在するか、そのようなもののうちで実なものはいかなる d で存在するか、という問題がアダマール予想の一般化した設定である事を指摘し、これに部分的な答えを与えた。

以上 3 年間にわたって、当初の研究目標がほぼすべて達成された。量子グラフにおける特異節点の数理の解明に格段の進展がもたらされた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

Ondrej Turek, Taksu Cheon, Threshold resonance and controlled filtering in quantum star graphs, Europhys. Lett. 98 (2012) 50005(5pp) [査読有]

Atushi Tanaka, Taksu Cheon, Sang Wook Kim, Gauge invariants of eigenspace and eigenvalue anholonomies: examples in hierarchical quantum circuits, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 335305(20pp) [査読有]

Taksu Cheon, Taiki Takahashi, Quantum phenomenology of conjunction fallacy, J. Phys. Soc. Jpn. 81 (2012) 104801(5pp) [査読有]

Taiki Takahashi, Taksu Cheon, A nonlinear neural population coding theory of quantum cognition and decision making,

World J. Neurosci. 2 (2012) 183-186 [査読有]

Ondrej Turek, Taksu Cheon, Potential-controlled filtering in quantum star graphs, Ann. Phys. (NY) 330 (2013) 104-141 [査読有]

Ondrej Turek, Taksu Cheon, Quantum graph as a quantum spectral filter, J. Math. Phys. 54 (2013) 032104 (17pp) [査読有]

Nobuhiro Yonezawa, Atushi Tanaka, Taksu Cheon, Quantum holonomy in Lieb-Liniger model, Phys. Rev. A 87 (2013) 062113(6pp) [査読有]

Atushi Tanaka, Nobuhiro Yonezawa, Taksu Cheon, Exotic quantum holonomy and non-Hermitian degeneracies in two-body Lieb-Liniger model, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 315302(17pp) [査読有]

Taksu Cheon, Atushi Tanaka, Ondrej Turek, Quantum anholonomy with topology change, Acta Polytechnica (Prague) 53 (2013) 410-415 [査読有]

Sergey S. Poghosyan and Taksu Cheon, Quantum graph vertices with minimal number of passbands, J. Phys. Soc. Jpn. 83 (2014) 044004(8pp) [査読有]

Atushi Tanaka, Sang Wook Kim, Taksu Cheon, Exotic quantum holonomy and higher-order exceptional points in quantum kicked tops, Phys. Rev. E 89 (2014) 042904(8pp) [査読有]

Ondrej Turek, Taksu Cheon, Hermitian unitary matrices with modular permutation symmetry, Linear Algebra & its Applications 469 (2015) 569-593 [査読有]

[学会発表](計8件)

田中篤司, 全卓樹, Sang Wook Kim 「固有空間と固有値のアンホロノミーでのゲージ不変量」日本物理学会 第 67 回年次大会 2012 年 3 月, 西宮市

米澤信拓, 田中篤司, 全卓樹 「一次元ボーズ系での固有値・固有空間のアンホロノミー: (I) 擬運動量を使ったアンホロノミーの計算」日本物理学会 第 68 回年次大会, 2013 年 3 月, 東広島市

田中篤司, 米澤信拓, 全卓樹 「一次元ボーズ系での固有値・固有空間のアンホロノミー: (II) 隠れた複素縮退点」日本物理学会 第 68 回年次大会, 2013 年 3 月, 東広島市

松本 直樹, 木村 陽介, 谷岡 亮輔, 全卓樹 「半乾燥地植生を記述する反応拡散方程式系における新しい非均一相」日本物理学会 第 68 回年次大会, 2013 年 3 月, 東広島市

木村 陽介, 谷岡 亮輔, 松本 直樹, 全卓樹 「乾燥地植生を記述する反応拡散方程式系におけるソリトン解」日本物理学会 第 68 回年次大会, 2013 年 3 月, 東広島市

Sergey S. Poghosyan, Taksu Cheon

「Reconstruction of quantum information after the measurement」Conference on Computer Science and Information Technologies, 2013 年 9 月, Yerevan

田中篤司, Sang Wook Kim, 全卓樹 「量子キックドトップにおける新奇な量子ホロノミーと高次の例外点」日本物理学会 第 69 回年次大会, 2014 年 3 月, 平塚市

田中篤司, 全卓樹 「量子ホロノミーの階層について」日本物理学会 2014 年秋季大会, 2014 年 9 月, 春日井市

[図書](計1件)

全卓樹 「エキゾチックな量子: 不可思議だけど意外に近しい量子のお話」(東京大学出版会, 2014 年 9 月)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

ホームページ等

http://ResearchMap.jp/T_Zen/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

全卓樹 (ZEN TAKUJU)

高知工科大学・環境理工学群・教授

研究者番号: 60227353