

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 29 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24560076

研究課題名(和文) グラフ理論と力学系理論に基づくネットワークシステム構造最適化

研究課題名(英文) Topology optimization of network systems based on graph theory and dynamical systems theory

研究代表者

高橋 規一 (Takahashi, Norikazu)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：60284551

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：クラスタ係数・代数的連結度・平均頂点間距離等の特徴量に基づくネットワーク構造最適化問題を考え、最適構造の特徴を理論解析によって解明するとともに、最適に近い構造をもつネットワークを生成するアルゴリズムを与えた。また、代数的連結度の分散推定、離散時間リカレントニューラルネットワークの収束性解析、非線形回路網の直流動作点の個数解析、非負値行列因子分解のための反復解法といったダイナミクスに関連する問題を理論解析と数値実験の両面から考察し、多くの重要な成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied the problem of optimizing the network topology based on indices such as clustering coefficient, algebraic connectivity and average shortest path length. Not only some properties of the networks having optimal or locally optimal topologies were revealed by theoretical analysis, but also some algorithms that can generate networks with nearly optimal topologies were developed. We also studied some dynamics related problems such as the decentralized estimation of the algebraic connectivity, the convergence analysis of discrete-time recurrent neural networks, the analysis of the number of DC operating points in a certain nonlinear circuits, and the global convergence of iterative solution methods for nonnegative matrix factorization, and obtained many important results through both theoretical analysis and numerical experiments.

研究分野：情報数理工学

キーワード：ネットワーク クラスタ係数 代数的連結度 平均頂点間距離 分散アルゴリズム ニューラルネットワーク 収束性 非負値行列因子分解

1. 研究開始当初の背景

1998年に Watts と Strogatz によってスモールワールドモデルが発表されて以来、複雑ネットワークに関する研究が急速な発展を遂げている。インターネット、World Wide Web、電力線網、友人関係のネットワーク、神経回路網、遺伝子ネットワークなどの現実社会に存在するさまざまなネットワークに共通する性質として、スモールワールド性やスケールフリー性といった概念が提唱され、また、それらの性質を有するモデルも数多く提案されてきた。しかしながら、ネットワーク最適化という観点から見ると、多くの基本的問題が未解決のまま残されている。例えば Watts は、1999年に出版された彼の著書の中で「頂点数と各頂点の次数が与えられたときに最もクラスタ化されたネットワークはどのようなものか」という問題を提起し、解の候補として結合穴居人グラフを示したが、それが本当にクラスタ係数を最大にするグラフであるか否かは未だに明らかにされていない。

一方、制御工学の分野では、近年、マルチエージェントシステムの合意形成が注目を集めている。合意形成とは、すべてのエージェントの状態が同一の値（例えば初期状態の平均値）をとることを意味し、これはセンサネットワークや群ロボットの移動制御等への応用にも深く関連する重要な技術である。したがって、工学的観点からは、できるだけ高速かつ効率的に合意を形成するシステムの設計が重要となる。代表的な合意形成アルゴリズムに着目すると、エージェント間の相互作用を表す無向グラフの代数的連結度（ラプラシアン第2固有値）が大きいほど合意への収束が速いことが知られており、また、代数的連結度はグラフの接続構造によって大きく異なることも実験的にわかっている。しかしながら、「頂点数と辺数が与えられたときに代数的連結度を最大にするネットワークはどのようなものか」という基本的な問題でさえ解決されていない。

2. 研究の目的

センサネットワーク・群ロボット・結合振動子ネットワーク等のダイナミカルなネットワークシステムに対して、情報処理の高速化・効率化・安定化を実現するための最適な接続構造を与える。これらのシステムでは、ネットワークの接続構造だけでなく構成要素のダイナミクスも重要であり、両者を切り離して考えることはできない。そこで、ネットワークの接続構造を特徴付ける種々の指標（例えばクラスタ係数や代数的連結度）の基本的性質や、それらの指標とネットワークのダイナミクスとの関係をグラフ理論と力学系理論の有機的連携によって解明し、それらを基に最適なネットワークシステムを構

築する。対象とするシステムによっては、構成要素のダイナミクス自体も設計の対象とし、接続構造と併せて最適化することを試みる。

3. 研究の方法

第一段階では、静的なネットワークや比較的単純なダイナミクスをもつネットワークに焦点を当て、適切な条件下でクラスタ係数や代数的連結度等の特徴量を最大にする接続構造を解析する。第二段階では、より複雑なダイナミクスをもつネットワークシステムを対象に、高速化・効率化・安定化を実現するための構造最適化を行う。具体的なテーマは以下の通りである。

- (1) クラスタ係数を最大または極大にするグラフの特徴付け
- (2) 高速合意形成のためのマルチエージェントネットワークの構造最適化
- (3) マルチエージェントネットワークにおける代数的連結度の分散的推定法の開発
- (4) 短い平均頂点間距離をもつ正則グラフの生成アルゴリズムの開発
- (5) 離散時間2値ニューラルネットワークの収束条件判定アルゴリズムの開発
- (6) ある種の非線形回路網から得られる非線形代数方程式の解析
- (7) 非負値行列因子分解のための反復計算法の大域収束性解析

4. 研究成果

研究の方法で述べた7つのテーマのそれぞれについて、本研究によって得られた成果を述べる。

- (1) クラスタ係数には Watts と Strogatz によって提案された平均局所クラスタ係数と Newman らによって提案された大域クラスタ係数の2種類がある。本テーマでは、何らかの条件の下で大域クラスタ係数を最大または極大にするグラフ構造の特徴について理論的解析を行った。まず、頂点数と辺数が与えられた場合を考察し、ロリポップグラフや道グラフの両端にクリークがつながっているグラフが大域クラスタ係数を極大にすることを証明した。これらは平均局所クラスタ係数の場合には極大グラフとならないため、大域クラスタ係数に特有の構造である。また、複数のクリークが1頂点を共有するグラフは平均局所クラスタ係数を極大にするが、大域クラスタを極大にするとは限らないことを示した。次に、次数列が与えられた場合を考察し、複数のクリークが木構造に連結したグラフが大域クラスタ係数極大グラフであることを証明した。平均局所クラスタ係数の場合にも同様の結果が得られていたが、大きな違いは、各クリーク内の頂点数が同一でなく

てもよいことである。以上の結果により、クラスタ係数の二つの定義の違いが明らかになった。

(2) Olfati-Saber と Murray によって提案された合意アルゴリズムの収束の速さはネットワークのラプラシアン行列の2番目に小さい固有値、すなわち、代数的連結度によって決まる。本テーマでは、何らかの条件の下で代数的連結度を最大または極大にするグラフ構造について理論解析を行った。まず、頂点数と辺数が与えられた場合を考察し、星グラフ、閉路グラフ、完全2部グラフ、巡回グラフなどのよく知られたグラフが代数的連結度を最大または極大にすることを証明した。また、星グラフに数本の辺を追加して得られるグラフが代数的連結度を最大にするための条件を導出した。最大グラフに関する成果のいくつかは他の研究者によって与えられた結果の一般化になっており、極大グラフの概念は本研究によって初めて導入された。次に、次数列が与えられた場合を考察し、次数3の正則グラフの中で代数的連結度を極大にするものの特徴付けを行うとともに、すべての完全多部グラフが代数的連結度を極大にすることを理論的に証明した。

(3) 移動可能なエージェントからなるネットワークにおいては、連結性を保持することが基本的かつ重要な課題である。代数的連結度はネットワークのつながりの強さを表す指標の一つであり、代数的連結度が正の値を取るのにはネットワークが連結であるときかつそのときに限られるため、その値を求めることによって連結性を判定することができる。本テーマでは、ネットワーク内の各エージェントが代数的連結度を分散的に推定する方法を開発した。はじめに、Yang らによって提案された連続時間アルゴリズムの一部を修正すればハードウェア化に適したアルゴリズムが得られることを指摘し、修正アルゴリズムによっても代数的連結度が正しく推定できることを理論的に証明した。次に、Yang らのアルゴリズムと動的平均合意アルゴリズムを組み合わせた、真に分散的な代数的連結度推定アルゴリズムを提案し、その有効性を数値実験によって示した。このアルゴリズムについては、ダイナミクスに関する理解が不十分であるので今後理論解析を進めていく予定である。

(4) 本テーマでは、与えられた頂点数と次数の下で平均頂点間距離を最小にする正則グラフを求める問題に取り組んだ。例えばマルチホップ無線ネットワークにおいて、各端末が同一の通信チャネル数をもつとすれば、ネットワーク内の通信速度は接続構造を表す正則グラフの平均頂点間距離に大きく依存すると考えられる。したがって、この問題は理論だけでなく工学的応用の観点からも非

常に重要である。これまでの成果として Cerf らによる下界の導出が古くから知られているが、その後大きな進展は見られていない。本研究では、短い平均頂点間距離をもつ正則グラフを自動的に生成するアルゴリズムを提案し、その有効性を数値的に検証した。その結果、提案アルゴリズムは多くの場合において Cerf らの下界に近い平均頂点間距離をもつグラフを生成できることがわかった。特に、頂点数と次数のいくつかの組に対しては Cerf らの下界が提案法によって実際に達成された。これは Cerf らの下界が最小であることを証明するものである。

(5) 離散時間2値ニューラルネットワークの状態が任意の初期条件に対して平衡状態に収束するための十分条件が2006年に高橋によって与えられた。その条件とは、ニューロン番号を適当に付け替えることによって結合行列の各対角要素が同じ行内の対角要素より右側の要素の絶対値の和より大きくなる、というものである。本テーマでは、与えられた正方行列がこの収束条件を満たしているか否かを判定するアルゴリズムの開発を行った。当初はこの判定問題がNP完全であると予想していたが、その後しばらくして、有向グラフの位相的整列問題に関する神保と山本による成果が直接適用可能であることがわかり、最終的には多項式時間アルゴリズムを与えることができた。また、本研究の副産物として、上記の判定問題の「対角要素の右側の要素の絶対値の和」を「対角要素の右隣の要素の絶対値」に置き換えるとNP完全問題になることを証明した。

(6) ある種の非線形回路網から得られる非線形代数方程式が有限個の解をもつための必要十分条件として、方程式中の行列が行列であることが知られている。本テーマでは、この非線形代数方程式から誘導されるある方程式の解集合の性質を詳細に解析し、解集合が2種類のタイプの曲線に限られることを証明した。また、行列の性質について理論的に解析するとともに、それを系統的に構成する方法を与えた。この成果はまだ限定的であるので、一般的な行列の系統的構成法の構築を目指して研究を続けていく必要がある。これが完成すればネットワークシステムの一種である非線形回路網の設計に有用な知見が得られると期待される。

(7) ネットワークの構造最適化と直接関係はないものの、関連する最適化手法として、非負値行列因子分解のための反復計算法の解析を行った。非負値行列因子分解とは、与えられた非負値行列を二つの非負値行列の積で近似することであり、信号処理や機械学習の分野で着目されている技術である。ネットワーク科学の分野でもコミュニティ検出に利用されるなど、注目が高まっている。本

テーマでは、非負値行列因子分解の計算法として広く利用されている乗法型更新式について考察し、Yang と Oja によって与えられた 11 種類の更新式のうちの 8 種類について、更新式にわずかな修正を加えるだけで大域収束性が保証されることを示した。また、残りの 3 種類についても、誤差関数を修正することによって新たな更新式を導出し、その大域収束性を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Norikazu Takahashi and Ryota Hibi, Global convergence of modified multiplicative updates for nonnegative matrix factorization, Computational Optimization and Applications, 査読有, vol.57, 2014, pp.417-440, DOI: 10.1007/s10589-013-9593-0

Tatsuya Fukami and Norikazu Takahashi, New classes of clustering coefficient locally maximizing graphs, Discrete Applied Mathematics, 査読有, vol.162, 2014, pp.202-213, DOI: 10.1016/j.dam.2013.09.013

Tetsuo Nishi, Shin'ichi Oishi and Norikazu Takahashi, Explicit proof of an inequality related to the Omega-matrix, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 査読有, vol.4, no.4, 2013, pp.430-450, DOI: 10.1587/nolta.4.430

Tetsuo Nishi, Shin'ichi Oishi and Norikazu Takahashi, Some Properties of Solution Curves of a Class of Nonlinear Equations and the Number of Solutions, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 査読有, vol.3, no.3, 2012, pp.301-335, DOI: 10.1587/nolta.3.301

[学会発表](計 3 2 件)

藤原拓郎, 高橋規一, 完全多部グラフの代数的連結度極大性, 電子情報通信学会 2015 年総合大会, 2015 年 3 月 13 日, 立命館大学びわこ・くさつキャンパス(滋賀県草津市)。

平田大貴, 高橋規一, 神保秀司, 山本博章, 離散時間 2 値ニューラルネットワークの一収束条件を判定する多項式時間ア

ルゴリズム, 電子情報通信学会 2015 年総合大会, 2015 年 3 月 11 日, 立命館大学びわこ・くさつキャンパス(滋賀県草津市)。

木村匠, 高橋規一, 非負値行列因子分解のための階層的交互最小二乗法の修正とその大域収束性, 電子情報通信学会 2015 年総合大会, 2015 年 3 月 11 日, 立命館大学びわこ・くさつキャンパス(滋賀県草津市)。

藤田啓輔, 高橋規一, 短い平均頂点間距離をもつ正則グラフの生成法, 電子情報通信学会非線形問題研究会, 2015 年 3 月 3 日, 兵庫県民会館(兵庫県神戸市)。

平田大貴, 高橋規一, 離散時間 2 値ニューラルネットワークの収束条件に関連するある判定問題の NP 完全性, 平成 26 年度(第 65 回)電気・情報関連学会中国支部連合大会, 2014 年 10 月 25 日, 福山大学(広島県福山市)。

Takuro Fujihara and Norikazu Takahashi, On graphs that locally maximize algebraic connectivity in the space of graphs with the fixed degree sequence, 2014 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, September 16, 2014, Luzern (Switzerland)。

Masato Seki and Norikazu Takahashi, New update rules based on Kullback-Leibler, gamma, and Renyi divergences for nonnegative matrix factorization, 2014 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, September 15, 2014, Luzern (Switzerland)。

Norikazu Takahashi, Jiro Katayama and Jun'ichi Takeuchi, A generalized sufficient condition for global convergence of modified multiplicative updates for NMF, 2014 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, September 15, 2014, Luzern (Switzerland)。

関真慧, 高橋規一, 非負値行列因子分解のための KL, Gamma, Renyi ダイバージェンスに基づく新たな更新式の導出, 電子情報通信学会信号処理研究会, 2014 年 7 月 11 日, 北海道大学(北海道札幌市)。

藤原拓郎, 高橋規一, 2-switch に基づく代数的連結度最大グラフ探索法と次数 3 の正則グラフへの適用, 電子情報通信学会非線形問題研究会, 2014 年 5 月 26 日, ビッグハート出雲(島根県出雲市).

藤原拓郎, 高橋規一, 同一次数列をもつグラフ族における代数的連結度極大グラフ - 完全 2 部グラフの場合 -, 電子情報通信学会 2014 年総合大会, 2014 年 3 月 19 日, 新潟大学(新潟県新潟市).

平田大貴, 高橋規一, 離散時間二値ニューラルネットワークの収束条件判定アルゴリズム, 電子情報通信学会 2014 年総合大会, 2014 年 3 月 18 日, 新潟大学(新潟県新潟市).

Jiro Katayama, Norikazu Takahashi and Jun'ichi Takeuchi, Boundedness of modified multiplicative updates for nonnegative matrix factorization, The Fifth IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing, December 17, 2013, Saint Martin (Netherland/France).

高橋規一, 西哲生, 行列の系統的構成法に関する一考察, 電子情報通信学会非線形問題研究会, 2013 年 10 月 29 日, サポートホール高松(香川県高松市).

Tetsuro Teraji and Norikazu Takahashi, On Graphs that Locally Maximize Global Clustering Coefficient, 2013 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, September 9, 2013, Santa Fe (USA).

寺司哲郎, 高橋規一, 大域クラスター係数が最大または極大となるグラフについて, 電子情報通信学会 2013 年総合大会, 2013 年 3 月 21 日, 岐阜大学(岐阜大学).

Jiro Katayama and Norikazu Takahashi, A Modified Multiplicative Update Algorithm for Convex Quadratic Programming Problems with Nonnegativity Constraints, 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, October 24, 2012, Majorca (Spain).

Tetsuo Nishi, Shin'ichi Oishi and

Norikazu Takahashi, A Theorem on a Solution Curve of a Class of Nonlinear Equations, 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, October 24, 2012, Majorca (Spain).

Tatsuya Fukami and Norikazu Takahashi, A New Continuous-Time Algorithm for Calculating Algebraic Connectivity of Multi-Agent Networks, 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, October 23, 2012, Majorca (Spain).

深海竜也, 高橋規一, マルチエージェントネットワークにおける代数的連結度計算のための新しい連続時間アルゴリズム, 電子情報通信学会非線形問題研究会, 2012 年 7 月 5 日, 鹿児島県産業会館(鹿児島県鹿児島市).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況(計 0 件)
取得状況(計 0 件)

[その他]
ホームページ等
<http://www.momo.cs.okayama-u.ac.jp/~takahashi/index.ja.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 規一 (TAKAHASHI, Norikazu)
岡山大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 60284551