

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 1 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24560576

研究課題名(和文) 変形局所化発生条件から見た各種応力速度の適性

研究課題名(英文) Characteristics of Stress Rates compared from a Viewpoint of Criteria for Incipience of Localized Deformation

研究代表者

岩熊 哲夫 (IWAKUMA, TETSUO)

東北大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60120812

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,200,000円

研究成果の概要(和文)：一般的歪弾性に、変形速度も含めた客観的応力速度を用いることを検討した。各応力速度の持つ特性は、解析的に結果が比較できる弾性問題と変形の局所化解析を通して比較検討した。特に弾塑性変形局所化問題の場合、平面ひずみ状態の予測はより現実的な値になり、一軸応力状態では実験で観察されるような引張圧縮で異なるせん断帯方向を予測できた。以上によりTruesdell応力速度を用いることの合理性を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：Usage of stress rates with deformation rate for hypoelasticity was examined through analytical approaches, such as simple shearing in elasticity and plastic localization of deformation. Especially, in the latter problem, the stress level for incipience of the localization was predicted in the practical order under plane-strain condition, and different directions of localization were obtained in tension and compression as has been observed in many experiments. The advantage of using the Truesdell stress rate for hypoelasticity has been shown from a theoretical point of view.

研究分野：工学

キーワード：変形の局所化 応用力学 増分構成則

1. 研究開始当初の背景

増分弾塑性構成則の歪弾性部分に広く用いられている Cauchy 応力の Jaumann 速度 (以下、これを単に Jaumann 速度と略記する) は結晶金属のような材料を前提としていて、一般性は無いと考えられる。また歪弾性是非保存的であることから、スピンを変更してそれを克服しようとする研究もあるが、材料挙動の記述という観点から抜けている。これに対し近年では、第2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみを用いた超弾性を採用する研究も多いが、この応力とひずみの定義には変形についての高次の非線形性が含まれており、測定できる抵抗力や伸び縮み等との関係にも高い非線形性を持つ等、力学的には扱い難い。つまり、前述のスピンを置き換えた応力速度の選択と同様、超弾性もどちらかと言えば数学的な定義である。すなわち、どの応力速度を用いるべきなのかという点について、力学的な観点からは明らかになっていない。

2. 研究の目的

そこで、各応力速度が持つ特性や適性を比較するために、数値的アプローチではなく可能な限り解析的なアプローチを用いるのが望ましいと考え、まず単純な弾性挙動を表現したときの特性を比較することを最初の目的とした。また、塑性は接線的記述つまり更新 Lagrange 記述という観点で定義されており、応力速度を用いて得られる整合発展則も物理的に明確な特性が存在する。これを踏まえ、弾塑性体としての変形の局所化予測結果を比較することによって、種々の応力速度が有する特性を整理することを目的とする。最後に、境界値問題のための数値解析コードの定式化の過程で得られる特徴を踏まえて、各応力速度間の相違について言及する。

3. 研究の方法

構成則そのものの研究ではないことから、結晶金属にも用いられる最も基本的な弾塑性則を対象とする。つまり塑性の基本モデルとして、von Mises の降伏条件を用いた Prandtl-Reuss モデルの関連流れ則を採用する。弾性については、用いる応力速度と変形速度を、二つの独立した弾性定数で定義される等方テンソルを用いて増分 Hooke の法則で関係付けるものとする。用いる応力速度毎に、Cauchy 応力の物質微分と速度勾配の関係は異なることから、弾塑性の増分構成則も異なる。例えば Truesdell 応力速度を用いて増分 Hooke 則を定義した場合は

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\sigma^2} d_{kl} \\ & + \frac{\mu}{\mu + H} \sigma'_{ij} d_{kk} - \frac{\mu}{2(\mu + H)} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{lm}}{\sigma^2} (v_{l,k} \sigma_{km} + v_{m,k} \sigma_{kl}) \\ & + v_{i,k} \sigma_{kj} + v_{j,k} \sigma_{ki} - \sigma_{ij} d_{kk} \end{aligned}$$

となり、Jaumann 速度を用いた場合は

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\sigma^2} d_{kl} \\ & + w_{ik} \sigma_{kj} + w_{jk} \sigma_{ki} \end{aligned}$$

になる。 μ と λ はラメ定数、 H は硬化係数である。まず弾性挙動については、一様な単断場にこの増分構成則を適用して積分することによって、応力ひずみ関係を求め、結果を比較する。

次に弾塑性挙動についての比較は、変形の局所化解析で行う。微小変形理論であれば、応力速度の選択とは関係なく局所帯の向きだけは求めることができるので、有限変形理論の結果は、それとも比較して検討する。一方、有限変形理論の範囲の局所化条件はノミナル応力増分で表された連続条件であることはよく知られている。それは、柱の弾性座屈のような周期性を有する分岐解析ではなく、孤立した変形速度の不連続場の存在可否による分岐解析である。その分岐規準に上の増分弾塑性構成則を代入して、局所化発生応力と局所帯の向きを比較検討して、応力速度の特性を比較する。

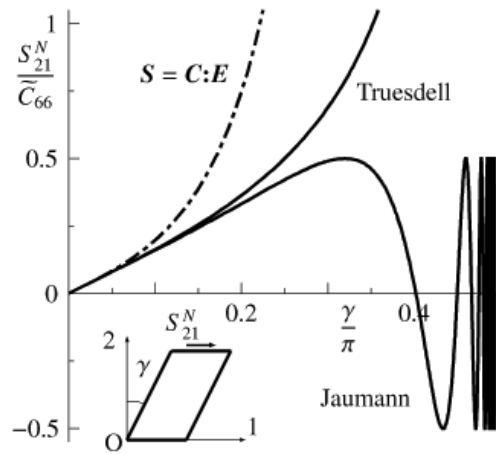


図1: 単純せん断载荷

4. 研究成果

(1) 弾性挙動: まず単純せん断载荷の場合には、Jaumann 速度を用いた場合には、変形が増えるに従って応力ひずみ関係が振動する現象を示す。これに対し Truesdell 応力速度を用いると、図1のようになり、せん断角度が $\pi/2$ になるにつれて荷重は無限大になり、力学的にも許容できる結果になる。なおこの変形モードでは体積ひずみが生じないため、Oldroyd 応力速度を用いた場合も、Truesdell 応力速度を用いた場合と同じ結果になる。

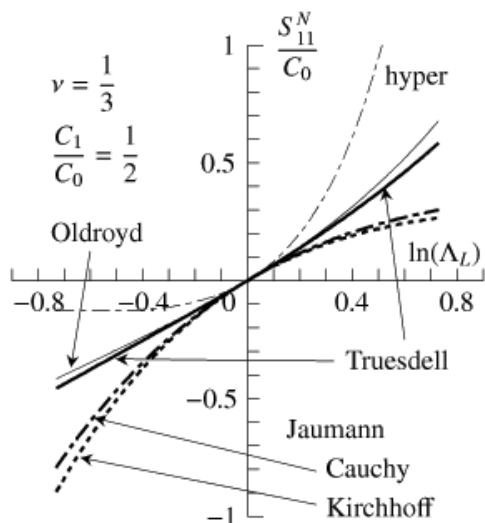


図 2: 1 軸載荷

一方単純引張の場合は、 x 方向に公称応力のみを作用させ、その方向に主ストレッチが、それと直交する 2 方向に横方向の主ストレッチが生じるものとする。これを弾性増分構成式を代入して積分したのが図 2 である。 ν は Poisson 比である。横軸は引張方向のストレッチを用いた対数ひずみであり、長さが倍か半分くらいまでの挙動を示している。また縦軸は公称応力なので、2 種類の Jaumann 速度を用いた場合には、ポアソン効果による断面積の増減に起因した非線形性を示している。それに対し Truesdell 応力速度を用いた結果は、公称応力と対数ひずみがほぼ線形になり、物理モデルの最も基本となる線形応答をまずは表現できている構成モデルの一つになっている。以上の、2 種類の載荷状態における挙動を比較する限り、Jaumann 速度には物理的な意味があるとはとても思えない。さらに一軸引張では、Truesdell 応力速度がほぼ線形挙動を示すのも興味深い。

実は、Truesdell 応力速度は第 2 Piola-Kirchhoff 応力の現配置での更新 Lagrange 記述の速度であることから、以上の結果は超弾性に近い関係を表していることが期待される。しかし前述のように、この応力にも Green のひずみにも、変形についての高次非線形項が含まれていることから、例えば二つの図にも示したように、定数係数で超弾性を定義した場合の結果と Truesdell 応力速度を用いた場合とは整合しないこともわかった。この二つの基本的な載荷モードにおいては、定数係数の超弾性はかなり剛な挙動を示している。

(2) 局所化解析: まず最も基本的な状態として、平面ひずみ状態を対象とする。これは平滑材の引張試験における板厚面に生じる局所化を対象としている。図 3a が Jaumann 速度で定義された場合の、各硬化係数毎の、

局所化の向き と発生応力の関係である。破線は材料が軟化した状態における局所化の解であり、実線が硬化状態での解である。軟化状態であれば、任意の硬化係数で局所化が何らかの方向に発生し、その荷重レベルは現実的なオーダーにあり得る。しかし、硬化状態の局所化荷重レベルは弾性係数の一桁小さい程度と、非現実的なオーダーである。これが現在認識されている結果である。

これに対し図 3b が Truesdell 速度で定義された場合の発生条件である。軟化の場合は、Jaumann 速度の場合と同様であるが、硬化の場合の荷重レベルが若干下がっていることがわかる。

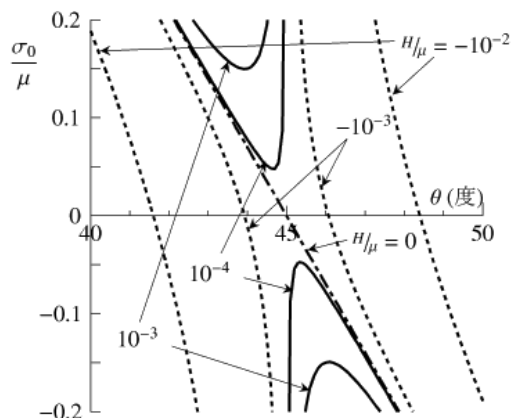


図 3a: Jaumann 速度の場合の局所化解

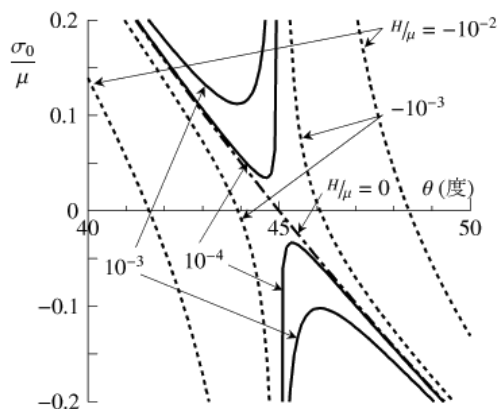


図 3b: Truesdell 速度の場合の局所化解

そこで引張で正の硬化状態、つまり荷重変位曲線のピーク前における局所化発生応力とせん断帯の向きを求めたのが図 4 である。引張で小さい硬化係数の状態では、Truesdell 応力速度を用いた方が Jaumann 速度を用いた場合よりも半分程度の大きさの局所化応力を予測しており、現実的な値に少しだけ近づく結果になった。ただし局所帯の向きは 45 度程度であり、完全塑性体つまり

硬化係数が零のときの微小変形理論の解とは一致している。

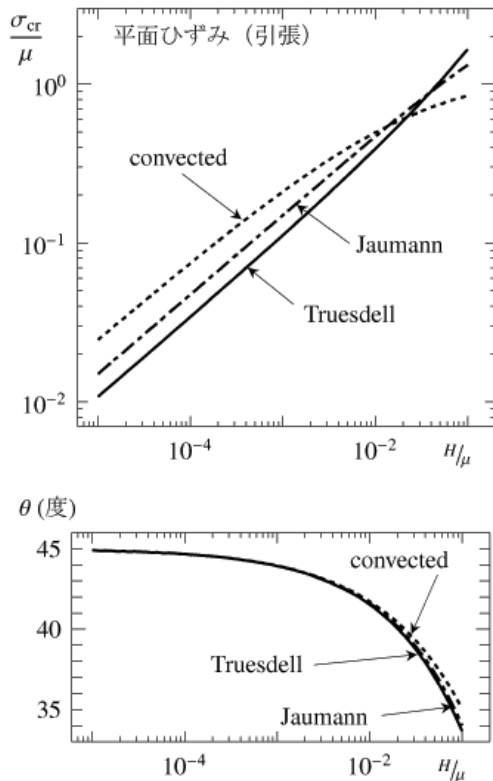


図 4: 硬化状態での局所化発生応力

一方、局所化発生応力が報告されているマレージング鋼による実験等との比較をしたのが表 1 である。圧縮の結果も表には載せた。実験で観察された変形局所化時の硬化係数を表の左上に示した。実験で観察されたせん断帯の向きは、引張が 38 度前後と 45 度より小さく、上述の局所化条件から得た結果は観察と定性的には整合しているが、予測された 45 度という角度は実測とは異なった。

表 1: 微小変形理論や実験との比較

$H/\mu = -(1+\nu)/6$	引張	圧縮
微小変形理論	35, 55	
Jaumann	48	48
Truesdell	49	61

次に軸対称 1 軸応力状態を対象としたが、軟化状態でなければ現実的な応力レベルでは局所化しないことが明らかになった。表 2 では、降伏直後の応力レベルで軟化して局所化が発生した場合の局所化の向きを比較したが、特徴的なことは、Jaumann 速度の場合は引張圧縮で同じ角度であるのに対し、Truesdell 速度では異なる値になったことだ。

これは平面ひずみ状態の上述の実験結果とも整合するのではないかと考えられる。いずれにしても、硬化状態の 3 次元状態で孤立した局所帯を予測できないという結果は、多くの数値解析結果とも整合する。

表 2: 1 軸状態での局所化の向き

$H/\mu = 0.00061$	引張		圧縮	
	σ_{cr}/μ	θ (度)	σ_{cr}/μ	θ (度)
微小変形理論	—	45	—	45
実験	0.024	38 ± 2	0.027	55 ± 2
Jaumann	0.12	45	0.12	45
Truesdell	0.086	45	0.080	45

(3) 数値解析のために: 最後に、数値解析を念頭に置いて、Jaumann 速度と Truesdell 応力速度を用いた場合のそれぞれで、接線的な弾性構成則が有する特性の解析的な比較を行う。有限変形理論の枠組の中で、増分つり合い式を Cauchy 応力の物質微分で書くことは、物理的な観点からそれほど容易ではない。最も原則的な表現はノミナル応力速度を用いた更新 Lagrange 的記述である。それを元にして、有限要素定式化を念頭に置き、弱形式を求めて増分構成則を代入した。最終的な内力仮想仕事項は

$$\int_v \delta v_{i,j} \dot{n}_j dv = \int_v \delta \{ \nabla v \}^T (F^e) \{ \nabla v \} dv$$

と書くことができる。そして、Jaumann 速度で弾性構成則を定義した場合にはこの接線行列 (F^e) は対称ではなく、Truesdell 応力速度で定義した場合にのみ対称行列になった。

つまり、亜弾性そのものは保存的な構成則ではないにもかかわらず、Truesdell 応力速度を用いた場合には、増分外力が保存的でさえすれば、接線的・瞬間的に仮想仕事式に対する汎関数を、少なくとも形式的には定義できることが明らかになった。したがって、Truesdell 応力速度を用いた弾性構成則は他の亜弾性モデルとは異なり、更新 Lagrange 的には他とは異なる特性を持つ亜弾性を定義していると捉えることができる。

(4) まとめ: 塑性流れ則が更新 Lagrange 記述によって物理的にわかり易い構成則になるため、この更新 Lagrange 記述と近年よく用いられる超弾性とを統合するような亜弾性を提案し、それに対応する応力速度が Truesdell 応力速度であることを示した。その弾性構成則は非保存的ではあるが、接線的には汎関数が定義できるという特徴を有することも明らかになった。単純な弾性挙動における特性は、Jaumann 速度を用いた場合よ

りも力学的に容認できるものであった。また変形の局所化予測では、平面ひずみ状態における引張の予測荷重レベルがかなり改善されることがわかった。これによって、現在主流の Jaumann 速度より Truesdell 速度が相応しいという新しい結論が得られ、今後、基本的な数値解析を実施した上で、定量的な違いを明らかにする予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

1. 荒川淳平, 岩熊哲夫, 増分弾塑性構成則に用いる応力速度の選択, 土木学会論文集 A2(応用力学), 査読有, Vol.70, 2014, pp.1_365-1_374.
DOI: 10.2208/jscejam.70.1_365

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩熊 哲夫 (IWAKUMA TETSUO)
東北大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 60120812