

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：17301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24650009

研究課題名(和文) 総当たりリーグ戦の数理的構造の解明と公平なスケジュールの効率的作成手法の開発

研究課題名(英文) Study of the mathematical structure of round-robin tournaments and the development of efficient scheduling of fair tournaments

研究代表者

末吉 豊 (SUEYOSHI, Yutaka)

長崎大学・工学研究科・教授

研究者番号：80128040

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、ホームゲームまたはアウェーゲームの連続(ブレイクという)が各チーム1回となるような公平な総当たりリーグ戦の数理的構造の解明と、スケジュールの効率的作成手法の開発を目的とした。まず、計算機による数え上げと理論的考察により、スケジュール作成が容易となる条件がリーグ戦のブレイク間隔の最大値を指標として表されることがわかった。更に、チーム数の増加とブレイク間隔の最大値の関係を計算機および数え上げの手法で調べることで、チーム数の増加とブレイク間隔の最大値の増加の関係を明らかにした。最後に、この関係を組合せ論的手法を巧みに組み合わせることにより証明した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied the mathematical structure of equitable round-robin tournaments with home-away assignments and the efficient scheduling of such tournaments. Here, "equitable" means that each team has only one break (consecutive home games or away games). By computer search and enumeration, we found that if the maximal break interval of the tournament is large, it is fairly easy to make its schedule. Furthermore, if we increase the number of teams, then the possible value of the maximal break interval grows fairly slowly. We described these phenomena by using the friend-enemy tables and the break interval sequences of the tournaments and proved main theorems by a combinatorial method.

研究分野：代数学

キーワード：総当たりリーグ戦 スケジューリング ホーム・アウェー ブレイク間隔列 敵味方表 ブレイク間隔の最大値

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 総当たりリーグ戦の数理的構造と具体的なスケジュール作成の研究は 1980 年代の de Werra の先駆的研究に始まる。de Werra は、グラフ理論的視点から総当たりリーグ戦の特長付けを与え、完全グラフの 1-因子分解を用いて基準スケジュールを構成した。2000 年代に入って、宮代、松井らはリーグ戦のスケジュール作成を整数計画問題として定式化し、計算機を援用して解くとともに、スケジュールが存在するための必要条件を与えた。近年では、スポーツイベントのもたらす収益、社会的影響の観点から、多様な制約を付加したスケジューリング問題を整数計画問題、制約問題として定式化し、計算機を用いて解く OR 的手法が盛んになったが、問題の大規模化によって、その限界も徐々に明らかになっていった。

(2) 申請者らは以前の研究で、ホームゲームまたはアウェーゲームの連続（ブレイクとよばれる）が各チーム 1 回ずつとなるスケジュールの「ホームアウェー表」を、対戦可能なチームが一目でわかる「敵味方表」に置き換え、「ブレイク間隔列」を用いて、スケジュールが存在するための条件を定式化していた (Sueyoshi et al., Far East Journal of Applied Mathematics 55(2011))。この手法は、表 1 枚でスケジュールを作成可能な非常に簡便な方法であり、同時に 1 つの敵味方表に対応する多数のスケジュールの関係も見やすいものであった。

## 2. 研究の目的

(1) サッカーリーグのようなホーム・アウェーの区別がある総当たりリーグ戦の数理的構造を申請者らが考案した手法を用いて解明し、公平なスケジュールの効率的作成手法を開発することを目的とした。従来、リーグ戦の数理的構造の解明にはグラフ理論や組合せ論的手法が用いられていたが、現実の多様な制約、チーム数の増加の下では必ずしも有効でなかった。このため、スケジュール作成には、大規模な整数計画問題や制約問題を計算機で解くオペレーションズ・リサーチ (OR) 的手法が用いられていたが、数理的構造の解明が不十分なため、制約の増加、チーム数の増加には十分対応できていなかった。本研究では、申請者らの手法を用いてスケジュールの基本部分を作成し、その上に制約を追加して、多様なリーグ戦に対応させることを目的とした。

(2) 具体的には、申請者らの考案した、敵味方表とブレイク間隔列を用いる総当たりリーグ戦のスケジュール作成手法を基に、以下のことを明らかにすることを目標とした。  
①各チームのブレイク数が 1 回ずつとなるリーグ戦のスケジュール作成手法の確立。

②公平なスケジュールが存在するための必要条件の十分性についての理論的検討。  
③連続する対戦相手による持ち越し効果を考慮した公平なスケジュール作成法の検討。  
④多様な制約に対応したリーグ戦のスケジュール作成手法の開発。

## 3. 研究の方法

「研究の目的」欄に記載した 4 つの目標のうち、まずは①②の解明を中心に据えて研究を開始した。

(1) 申請者らは前述の論文で、各チームのブレイク数が 1 回ずつで開幕条件と閉幕条件を満たす公平な総当たりリーグ戦について、ブレイク間隔列の満たす必要条件を用いて数え上げにより分類する手法と、敵味方表を用いてスケジュールを簡便に作成する手法を提案した。この場合、開幕条件と閉幕条件により、必要条件を満たすブレイク間隔列の候補がかなり絞られ、条件もタイトであるため、スケジュール作成は容易であった。

本研究では、一般に開幕条件と閉幕条件を必ずしも満たさない公平なリーグ戦を分類し、スケジュールを作成する手法を開発することを目標とした。この場合、最終ラウンドと第 1 ラウンドをつなげて、ブレイク間隔列が満たす必要条件を巡回的に考える必要があった。予備的結果として、必要条件を満たすブレイク間隔列を帰納的に構成する方法を得ていた。この方法によると、チーム数ごとにすべての必要条件を確かめる必要がなく、効率的にブレイク間隔列を分類できる。この方法を進め、C 言語のプログラムを作成することにより、必要条件を満たすブレイク間隔列を列挙することにした。

(2) 一方、前述の論文で分類したリーグ戦のブレイク間隔列はブレイク間隔の最大値が 4 のものであったことに着目し、42 チーム以下のリーグ戦に対して、ブレイク間隔の最大値が 5 のブレイク間隔列を前述の論文と同様の手法で分類し、スケジュールを作成した。分類は、計算機による分類とも完全に一致している。更に、分類の過程で、ブレイク間隔の最大値の増加についての規則性が徐々に明らかになった。また、チーム数を 2 倍にして、ブレイク間隔の最大値を 1 増加させる手法も発見した。

(3) ブレイク間隔の最大値の増加についての規則性は、いくつかの定理に整理することができる。研究期間の後半はこれらの定理の証明に費やした。手法は、組合せ論的手法や帰納的手法、数え上げ手法などを組み合わせるものである。研究目標の①について大きな進展があったのは収穫であるが、これらの成果を②③④に応用することについては、時間的制約のため至らず、今後の課題となった。

#### 4. 研究成果

(1) 公平なリーグ戦のスケジュールが作成可能（実行可能という）であるための必要条件はブレイク間隔列が満たす組合せ論的な不等式で記述できるが、中でもブレイク間隔の最大値がスケジュール作成の容易さに深く関わっていることを 24 年度の研究で明らかにした。

具体的に述べると、ブレイク間隔列が実行可能であるための必要条件を満たすような公平なリーグ戦とそのブレイク間隔の最大値を列挙するプログラムを作成し、ブレイク間隔の最大値の増加の様子を計算機で調べた結果、このようなリーグ戦のブレイク間隔の最大値は、チーム数に対してゆっくりと増加し、チーム数が 2 の  $k$  乗になるときに 1 増加し、その後一旦元に戻り、チーム数が 2 の  $k$  乗+2 の  $(k-2)$  乗のときに再び 1 増加することが 64 チーム以下のリーグ戦で観察された。特に、チーム数が 2 の  $k$  乗のときは、ブレイク間隔の最大値を与え、かつ実行可能であるための必要条件を満たす公平なリーグ戦は 1 つしかなかった。

これらの事実を理論的に検討した結果、「チーム数が 2 の  $k$  乗のとき、ブレイク間隔の最大値を与え、かつ実行可能であるための必要条件を満たす公平なリーグ戦は 1 つしかなく、実際にスケジュールを作成可能である」ことを証明した。

また、スケジュール作成に関して、一般に、 $2n$  チームの公平なリーグ戦のスケジュールから、 $4n$  チームの公平なリーグ戦のスケジュールでブレイク間隔の最大値が 1 増加するようなものを構成する手順を発見した。

(研究の経緯) ブレイク間隔の最大値の研究は、以前に考察した開幕条件、閉幕条件を満たす公平なリーグ戦の分類およびスケジュール作成から発展したものである。開幕条件、閉幕条件は人工的な条件であるが、分類およびスケジュール作成を容易にする大きな要因であった。

これらの条件がブレイク間隔の最大値に関係していることに気づき、ブレイク間隔の最大値を増加させたときの公平なリーグ戦の分類を 40 チーム以下のリーグ戦に対し、手作業で行ったところ、上述の事実が観測された。そこで、プログラムを作成し、64 チーム以下のリーグ戦に対して計算機を用いて調べたところ、観測された事実はほぼ正しいのではないかとの感触を得たので、証明に取り掛かった。24 年度の時点では、観測された事実をすべて証明できてはいなかったが、証明の中で最も重要な部分（チーム数が 2 の  $k$  乗の場合）はできていた。これは、研究計画を立てた当初は予測していなかった大きな進展であった。

(2) 25 年度、26 年度は引き続き、理論的な検討を行い、「ブレイク間隔の上限値は、チ

ーム数が 2 の  $k$  乗のときに 1 増加し、その後一旦元に戻り、チーム数が 2 の  $k$  乗+2 の  $(k-2)$  乗のときに再び 1 増加し、その後一旦元に戻り、チーム数が 2 の  $k$  乗+2 の  $(k-2)$  乗+2 の  $(k-4)$  乗のときに再び 1 増加、・・・ということを繰り返す」ことを組合せ論的な手法で証明した。この上限値は、チーム数が 2 の  $k$  乗のときと 2 の  $k$  乗+2 の  $(k-2)$  乗のときは実際に最大値であるが、その他の場合は個別に示す必要がある。以上の結果から、ブレイク間隔の最大値については主要な結果が得られたことになる。

更に、ブレイク間隔の最大値が 5 以下のリーグ戦を数え上げ手法で分類し、42 チーム以下で分類を完成させた。このようなリーグ戦は 30 チーム以下および 34 チームから 38 チームでは存在せず、ブレイク間隔列の cyclic rotation の違いを除くと、32 チームで 1 つ、40 チームで 28 個、42 チームで 12 個存在する。これらについては、25 年度中に論文として発表した。この結果は計算機による数え上げおよび理論的な結果と整合している。

(研究の経緯) チーム数の増加に対するブレイク間隔の最大値の増加の関係について、24 年度に観測された事実に関して、25 年度に、必要条件の不等式をうまく組み合わせることにより、チーム数  $2n$  を具体的に与えれば証明できることがわかった。しかも、その手法で 66 チーム以上の場合を手作業で調べることにより、更に詳しい事実が観測された。一般の  $n$  に対する証明は簡単ではなかったが、個別の  $n$  に対する証明を詳しく検討し、数学的帰納法的な証明に持ち込むことにより、当初より精密化された形で 26 年度までに証明を完成させることができた（論文準備中）。これらの結果は、研究計画を立てた当初は予測していなかった極めて大きな進展である。本研究の大きな目標として、「公平なリーグ戦が実行可能であるための必要条件は十分条件でもあるだろう」（宮代-岩崎-松井の予想）の証明があるが、これに関しては今のところ具体的な進展がない。また、連続する対戦相手がもたらす持ち越し効果を考慮したスケジュール作成や多様な制約に対応したリーグ戦のスケジュール作成についても、時間的に検討する余裕がなかった。

(研究成果の意義) ブレイク間隔の最大値は、公平なリーグ戦全体を統制する重要な不変量と考えられる。1980 年代に、de Werra により、公平なリーグ戦の研究が始まった当初はグラフ理論的な視点からの研究が主流で、グラフの様々な構造をスケジュール作成に応用する方向であった。このような中で、基準スケジュールとよばれるスケジュールが構成され、これを變形していくつかのスケジュールが構成された。ブレイク間隔の視点から見ると、基準スケジュールはブレイク間

隔の最大値が(実行可能である公平なリーグ戦全体の中で)最小となるようなスケジュールであるが,本研究で検討したブレイク間隔の最大値を与えるスケジュール(先端スケジュールと名付けた)は基準スケジュールの対極にあるスケジュールであり,一般の実行可能なスケジュールはその中間にある.

3年間の研究で,先端スケジュールおよびブレイク間隔の最大値について,チーム数が比較的少ない場合の分類と基本的な定理の証明が得られた.分類についてはすでに論文として公表済みであるが,ブレイク間隔列の教え上げ手法と主要な定理の証明については今後整理して論文にまとめる作業が残っている.

(今後の課題) 宮代-岩崎-松井の予想の証明は現時点では難しいかも知れないが,先端スケジュールの構成手法を応用して,性質の良いリーグ戦に対するスケジュール作成は可能と思われる.最終的には,スケジュールを部分から構成して最適化する手法が有効であると考えられるが,そのための指標となる不変量を発見することが重要である.

本研究の手法は,ブレイク間隔列と敵味方表を用いる組合せ論的,教え上げ理論的なものであるが,これをグラフ理論的に解釈することが,予想の証明を含め,今後の研究を大きく進展させる上で重要な到達点になると考えている.

#### <引用文献>

- ① Y. Sueyoshi, R. Harasawa and A. Kudo, On the break interval sequences of equitable round-robin tournaments, Far East Journal of Applied Mathematics, Vol. 55, No. 1, 2011, 1-25.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

##### [雑誌論文] (計 4 件)

- ① R. Harasawa, Y. Sueyoshi and A. Kudo, Theoretical comparison of root computations in finite fields, IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E97-A, 2014, pp. 1378-1381, 査読有  
DOI: 10.1587/transfun.E97.A.1378  
[http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp/dspace/bitstream/10069/34428/1/IEICETFECCS\\_E97-A\\_1378.pdf](http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp/dspace/bitstream/10069/34428/1/IEICETFECCS_E97-A_1378.pdf)
- ② Y. Sueyoshi, R. Harasawa and A. Kudo, On equitable round-robin tournaments with maximal break interval greater than or equal to 5, Far East Journal of Applied Mathematics, Vol. 86, No. 1, 2014, pp. 57-91, 査読有  
<http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp/d>

[space/bitstream/10069/34240/4/FEJAM86\\_1\\_57.pdf](http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp/dspace/bitstream/10069/34240/4/FEJAM86_1_57.pdf)

- ③ R. Harasawa, Y. Sueyoshi and A. Kudo, Root computation in finite fields, IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E96-A, 2013, pp. 1081-1087, 査読有  
DOI: 10.1587/transfun.E96.A.1081  
[http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp/dspace/bitstream/10069/32161/1/IEICETFECCS\\_E96-A\\_1081.pdf](http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp/dspace/bitstream/10069/32161/1/IEICETFECCS_E96-A_1081.pdf)
- ④ R. Harasawa, Y. Sueyoshi and A. Kudo, Improving the Berlekamp algorithm for binomials  $x^n - a$ , Proceedings of the 4th International Workshop on the Arithmetic of Finite Fields (WAIFI 2012), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7369, 2012, pp. 225-235, 査読有  
[http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp/dspace/bitstream/10069/28863/1/LNCS7369\\_225.pdf](http://naosite.lb.nagasaki-u.ac.jp/dspace/bitstream/10069/28863/1/LNCS7369_225.pdf)

##### [学会発表] (計 5 件)

- ① 末吉豊, 原澤隆一, 工藤愛知, ホーム・アウェーの別がある公平な総当たりリーグ戦のブレイク間隔の最大値について (II), 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会 応用数学分科会, 愛媛大学城北キャンパス (愛媛県松山市), 2013. 9. 24.
- ② 末吉豊, 原澤隆一, 工藤愛知, ホーム・アウェーの別がある公平な総当たりリーグ戦のブレイク間隔の最大値について, 日本数学会 2013 年度年会 応用数学分科会, 京都大学吉田キャンパス (京都府京都市), 2013. 3. 21.
- ③ 末吉豊, 原澤隆一, 工藤愛知, ホーム・アウェーの別がある総当たりリーグ戦の公平なスケジュール作成について, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会 応用数学分科会, 九州大学伊都キャンパス (福岡県福岡市), 2012. 9. 18.
- ④ 原澤隆一, 末吉豊, 工藤愛知, A remark on the computation of  $r$ -th roots in finite fields, 日本応用数理学会 2012 年度年会 JANT オーガナイズド・セッション「数論アルゴリズムとその応用」, 稚内全日空ホテル (北海道稚内市), 2012. 8. 29.
- ⑤ R. Harasawa, Y. Sueyoshi and A. Kudo, Improving the Berlekamp algorithm for binomials  $x^n - a$ , International Workshop on the Arithmetic of Finite

Fields (WAIFI 2012), Ruhr-Universität,  
Bochum, Germany, 2012. 7. 19.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.cis.nagasaki-u.ac.jp/program/contents/laboratory.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

末吉 豊 (SUEYOSHI, Yutaka)  
長崎大学・工学研究科・教授  
研究者番号：80128040

### (2) 研究分担者

工藤 愛知 (KUDO, Aichi)  
長崎大学・工学研究科・教授  
研究者番号：00112285  
(削除：平成 25 年 3 月 29 日)

原澤 隆一 (HARASAWA, Ryuichi)  
長崎大学・工学研究科・助教  
研究者番号：10363467

### (3) 連携研究者

なし

研究者番号：

### (4) 研究協力者

なし

研究者番号：