様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２７年　６月１５日現在

機関番号：１６２０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５３２７９

研究課題名（和文）中学校図形の証明における「変数性」・「定数性」をもつ図の役割

研究課題名（英文）The role of geometric figure of which "variable" and "constant"underlie hidden in junior high school geometric proving

研究代表者

風間　喜美江（Kimie, KAZAMA）

香川大学・教育学部・教授

研究者番号：００５５２３７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は証明指導の改善を目的とし、図形の命題で使われる図の｢変数性｣と｢定数性｣の視点に関する生徒の理解を明らかにし(A)、証明の教材開発と指導の提案を行う(B)ものである。①～④の順にA、Bに関した成果が明らかになり、証明指導改善の方針が具体化できた。
①　命題の図の捉え方の生徒の実態を明らかにした。　②　①を踏まえ開発した証明の教材で授業を行い実証的にその妥当性を見た。　③　指導前後の生徒の変容を分析した。その効果、生徒の証明に対する理解が深まったことが明らかになった。　④　命題で使われる図の「変数」を、１つから２つ、３つと増やす教材開発の視点が、証明指導に有効に働くと判断できた。

研究成果の概要（英文）：For the purpose of improvement of geometrical proof teaching, this study has two aims; (A) to clarify how junior high school students understand two geometrical viewpoints i.e. "variable" and "constant" of figure used in a proposition, and, (B) to suggest the development of teaching materials and the improvement of proof teaching. This study makes the improvement plan of proof teaching.
①It clarifies how junior high school students understand a geometrical figure.② Teaching materials that are developed on the basis of the data of ① are used in the classroom, its validity is confirmed empirically.③ The results of the comparative analysis of student ' s understanding between before and after teaching, revealed that they can do better.④ It is determined that the new idea of teaching material development： to increase the number of "variable" from one to two and three that is appended to a figure used in a propositional, works effectively in proof teaching.

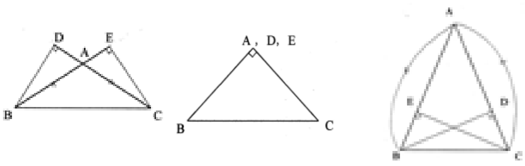
研究分野：数学教育学

キーワード：図形命題　図の変数性　図の定数性　証明活動　図の役割

１．研究開始当初の背景

本研究の新しさは，図形の証明することの意味やその理解についての指導研究，および，そのための教材開発を２つの視点：「図の定数性」と「図の変数性」（文字と対比させて下で述べる）から行うこと，にある。指導の実態はどうであろうか。「二等辺三角形の底角は等しい」の命題では，ひとつだけの図を示し，それがすべての二等辺三角形で成り立つことを示すには演繹的な証明が必要であること理解させようとする。多少複雑になる下のような命題でも，最右図に対してだけ証明をし指導が終わる。この場合，二等辺三角形の頂角の大きさにより，３つの証明が必要で，その吟味をせず多くは指導が終わってしまう現状を目の当たりにしてきた。

AB=AC の△ABC の点 B，C から辺(直線)AC，AB へ垂線をひき，AC，AB との交点をそれぞれ D，E とする。BD＝CE となることを証明せよ。



図形の証明で用いられる図について E.Fischbein は，「図」が二重の実体をもつこと，すなわち，

①抽象的で理想化された形式的に記述できる実体(すべての純粋な概念と同じように)

②感覚によって捉えられた図的な諸性質（ある「形」によって表象された諸性質）からなる実体をもつこと

を，そして，この二重の実体が共存したものをわれわれは幾何学的実体としてとらえていることを指摘している。つまり，図形の証明で用いられる「図」は論理を背景とした概念的な制約と感覚を背景としたイメージ（ゲシュタルト）的な制約を受けていることを述べている。

具体例から見る。「長方形は台形である」ことの判断とその理由の調査（中２年生 383 名，中３年生 388 名）では，中２：23.5%，中３：18.4%の正答率である。これは長方形や台形の感覚的なイメージ（①）からの判断が優先され，図的な諸性質（②）に至らない判断によったからである。

上述から，図形の「図」に着眼点を見出した。その「図」が文字と同じようなはたらきをもつことに気づき，図形の命題で使われる図の変数性と定数性の視点をおく教材開発や指導法の研究が必要となる。

２．研究の目的

文字の使用と図形の証明は中学校数学の学習を特徴づける核心である。これらの学習方法によって数学へと質的な変化をなすのであるからこそ生徒の学習・教師の指導に困難をもたらしている。特に，図形の論証の学習での問題は長い歴史をもち，さまざまな試みにもかかわらず，いまだに解消されていない。

そこで，本研究は，中学校図形の証明指導の改善を目的とする。図形の「図」が文字に匹敵する役割をもつ新しい着眼点で，特に，文字指導との比較考察を通し次のことを目的とする。

（ａ）図形の命題で使われる図の「変数性」と「定数性」の視点に関する生徒の理解

（ｂ）図形の命題で使われる図の「変数性」と「定数性」の視点を導入した証明の教材開発と指導の提案

３．研究の方法

教材開発を２つの視点：「図の定数性」と「図の変数性」から行うこと，にある。ひとつの図形に対して同じ条件を保ちつつ図は無数にあり，生徒は学習の中でこのことを理解しなければならい。このことから，文字機能の定数性と変数性と同じように，図のはたらきにも

・文字における変数と同じ意味が込められている場合（これを「図の変数性」と呼ぶ）

・文字における定数と同じの意味が込められている場合（これを「図の定数性」と呼ぶ）

があると考えられる。

まったく新しいこの２つの視点を図形（とくに命題の理解や証明）で用いられている図に投射してその図を読み解くことによって，図形の命題の証明の意味を深めてその理解をより育てる新しい指導法とそれを可能にする。そこで，上記２（ａ）を明らかにし，（ｂ）の提案を行うものである。

そのために次の(A)～(C)の順と内容の方法をとり，２（ａ），（ｂ）に関した成果を明らかにし，証明指導改善の方針を具体化する。

(A) 命題の図の捉え方の生徒の実態を明らかにする。

(B) (1)を踏まえ開発した証明の教材で授業を行い実証的にその妥当性を見る。

(C) 指導前後の生徒の変容を分析した。その効果，生徒の証明に対する理解が深まりを明らかにする。

４．研究成果

研究方法３(A)～(C)の沿って、成果を述べるが、それ以上の成果(D)があり，それも付記する。

(A)命題の図の捉え方の生徒の実態

証明の大前提は仮定をどう捉えるかである。「○○ならば△△」の「○○」が仮定，「△△」が結論という指導は初期の頃では形式的な指導は必要であろうが，証明に馴れていく段階では，何を前提にこの証明を行うのかを考察することが，証明の第一歩である。その際に，仮定に関する図をどれだけ生徒にかか

せるかということ，またはかかれた図と仮定との関係をどれだけ生徒によみとらせるかということが，証明活動の鍵となり，以下，その問題意識から調査を行い，生徒の実態をみた。

(1) 調査のねらい

与えられた命題とその証明から，仮定と図の関係を見出し証明の意味をよみとることができるか，生徒の実態を明らかにする。

(2) 調査問題　設問１，設問２(略)

(3) 調査対象・時期・時間

・中２学年図形学習修了生徒（中３）

・国立大学附属中学校１校１クラス，公立中４クラス　　　　計 165 名

・平成２４年７月上旬　　・２０～３０分間

－設問１－

1.「右のような図形を星形五角形といいます。
星形五角形ABCDEの５つの角∠a，∠b，∠c，∠d，∠eの和は１８０°になります。」

この説明をするため，正男さんは下の図１をつくりました。そして，図１に直線CDをかき入れるとBE // CDとなることに気づきました。

【正男さんの説明】
BE // CDから，
∠b＝∠イ，∠e＝∠ア　・・・・・・★
また，
∠ACD＝∠c＋∠ア＝∠c＋∠e
∠ADC＝∠d＋∠イ＝∠d＋∠b
さらに，△ACDで，
∠a＋∠ACD＋∠ADC＝１８０°・・・☆
よって，
∠a＋（∠c＋∠e）＋（∠d＋∠b）＝１８０°
したがって，星形五角形ABCDEの５つの角∠a，∠b，∠c，∠d，∠eの和は１８０°になる。

－図１－

この説明について，(1)～(3)に答えなさい。

(1) 正男さんが「★は成り立つ」と考えた理由は次の①～④のどれですか。最も適したものを１つ選び，番号で答えなさい。

①　平行線の錯角は等しいから　　②　平行線の同位角は等しいから
③　錯角が等しい２直線は平行だから　　④　同位角が等しい２直線は平行だから

(2) 正男さんが「☆は成り立つ」と考えた理由は次の①～④のどれですか。最も適したものを１つ選び，番号で答えなさい。

①　一直線上の点を頂点とする角は１８０°だから
②　対頂角は等しいから
③　三角形の１つの外角は，それととなりあわない２つの内角の和に等しいから
④　三角形の内角の和は１８０°だから

(3) 正男さんの説明について，あなたの考えにあてはまるものを，次のどちらか選び○で囲みなさい。また，その理由を述べなさい。

［　・正しい　　　・正しいとはいえない　］

<理由>

(4) 調査結果

【設問１(1)(2)】について

問題作成の意図

根拠となる事柄を見抜くことができるか。

生徒の反応・・・表１

表１　　　　(%)

(1)＼(2)	①	②	③	④	無答	計
①	0.6		4.8	**75.2**		80.6
②	0.6		1.8	4.2		6.7
③	1.2	0.6	1.8	6.1		9.7
④		0.6		1.2		1.8
無答					1.2	1.2
計	2.4	1.2	8.5	86.7	1.2	100

説明の記述をよみとり，根拠となる事柄を選択肢から判断した(1) (2)の反応の関係をまとめると表１となる。どちらも正答を得た生徒は 75.2%であった。

【設問１(3)】について

問題作成の意図

図形の性質が成り立つことを説明するために，仮定にない，図に依存した特別な性質（ＢＥ//ＣＤ）を使ってることを見抜くことができるか。

・判断　　　表2　(%)

正しい	69.7
正しいとはいえない	26.1
無答	4.2
計	100

・詳細は略

(5)結果の考察

【設問１】について

(1),(2)とも正答の 124 人(75.2%)の詳細を見ると，(3)で説明が「正しいとはいえない」と判断できた生徒はその中の 28%(35 人)で，全体での人数に対するその割合は 21%となる。逆に(3)の判断ができた 42 名の中で(1),(2)がでた生徒は 34 名であった。ことから，(1),(2)での根拠となる事柄を基本的な図形の性質として判断できることは(3)で回答できることの基本の力と考えていたが，その繋がりが強いとはいえないことがわかる。これは，穴埋め問題のような部分的に回答ができた生徒でも，命題の仮定を意識し，図に引きずられない仮定をもとに図で思考できる生徒は全体の 26%，さらに，理由の内容までの生徒は全体の 16%しかいない。仮定を前提に証明を考える力の決定的な不足に注意したい。

【設問２】について

(1)で，証明が「正しい」と判断した生徒は全体の 90%，そして「正しいとはいえない」と判断した生徒は 9%(15 人)である。その 15 人のうち５人はある妥当な考えをもって，正しいとはいえないと答えている。

(2)で，「正しいとはいえない」と判断した生徒は 69.7%(115 人)，その理由をみると，「証明の必要がない」の内容は３通りあった。

・１つ目は「明子さんの図にしたがって，頭の中で正男の図で証明してから，証明の必要がない」と判断している。当然の帰結として直ぐ「必要がない」と判断するのではなく，正男さんの図で「必要がない」と導いていることに注意したい。逆説的には「正男さんの図」が証明の必要なしを導いているといえよう。

・２つ目は証明内容よりも図そのものに着目

し，「図２を９０°回転させると図３になり」，したがって，「本質的な条件は変わらないから」を理由にして判断している。どちらの場合も判断するためには，生徒は明子さんと正男さんの２つの図を必要としたことに注意したい。
・３つ目は他の定理を使って判断していることである。より一般的内容をもつ定理，例えば，中２で既習済みの定理「平行四辺形は，対角線の交点Oを対称の中心とする点対称な図形である」からと結論する場合である。この定理は，論証のふつうの順序からいえば，設問２の命題の後にくるものであり，３年生を調査対象としたことから，本調査のねらいとは異なった回答となったことはやむをえない。ただ強弁すれば，３つ目の判断ができるためには，そのまえに，上２つのどちらかによる判断を生徒はしたはずである。

図形でいう図は形状と概念の構成物である。そういう力があるから図を見ながら推論できるのである。総合幾何の研究方法がそうである。これは図形教育の基本を語っており，実態調査から上記活動を意図した指導の必要性を示している。

(B) (A)を踏まえ開発した証明の教材で授業を行い実証的にその妥当性を見る。

(1)研究の流れと方法

中学校第２学年の図形指導内容は
ア．平行線の性質　　イ．三角形の合同条件
ウ．四角形
と大別できる。このウに関する授業を研究対象として，次の研究の流れをとる。

①事前テスト･･･ア，イの直後に生徒の実態を把握するための事前テスト（プレテスト）を行う。
②授業実施･･･ウについて授業実施をする。
③事後テスト･･･ 授業実施後の事後テスト（ポストテスト）を行い生徒の変容を明らかにする。

ここでは②を示し，①，③については「（C）指導前後の生徒の変容」で述べる。

(2)指導計画と授業の実際

1)指導計画

①事前テスト（３ (B) 調査問題を含むテスト）
②２つの正三角形（復習，条件にあった図，図形を動的に捉える）　２時間
②’生徒が②の仮定を変えて解決するレポート課題（冬休みの課題）
③平行四辺形の性質　２時間
④平行四辺形の性質の利用　１時間
⑤平行四辺形になるための条件（定理とその逆他）　３時間
⑥いろいろな四角形（三角形の中に現れる平行四辺形）　２時間
⑦三角形・四角形の中点（中点連結定理・はと目返し）　２時間
⑦’はとめ返しの課題レポート
計　１２時間

2)実際の指導実施・対象

①時期：平成２５年１２月中旬～平成２６年２月上旬
②指導対象：国立大学附属中学校第２学年３クラス（３の調査対象と同じクラス）
③指導者：研究代表者

(3)指導の実際と生徒の反応－取り上げた図に焦点をあてた問題－　・・・・略

(C)指導前後の生徒の変容

(1)研究の流れと方法

研究の流れは（B）で述べた。ここではその①事前テスト(プレテスト)と授業実施後の③事後テスト(ポストテスト)で，生徒の変容を明らかにした。

(2)調査による生徒の変容の把握と考察

1)調査のねらい･･･（B）では，「図」を顕在させる指導内容を考察しその実際について報告した。ここでは，証明と図に関する指導前と指導後の生徒の意識についての現状とその変容について，全体的な傾向を調査を通して明らかにすることをねらいとする。
2)調査対象･･･（B）の授業実践を行った生徒を対象とした。
3)調査時期：
調査A･･･指導前の実態調査（プレテスト）平成２５年１２月中旬
調査B･･･指導後の実態調査（ポストテスト）平成２６年３月中旬
※調査Aは指導実践１週間前，調査Bは指導実践１ヶ月後の実施である。
4)調査方法，調査時間･･･調査問題を調査A，Bとも同一問題で実施した。 調査時間は10～15分であった。
5)調査問題とその意図
・調査問題･･･略
・出題のねらい･･･命題の図を吟味し，
○図がひとつで十分であるとわかったときは，命題に使われる図は，代表元として１つでよい。
○図が複数あるとわかったときは，命題に使われる図は，複数のそれぞれの場合について，部分的な代表元としてそれぞれ考える必要がある。

6)結果と考察

①設問(1)のプレテスト・ポストテストの調査結果と考察

設問(1)の明子さんの証明についての「正しい」「正しいとはいえない」の判断の結果で，その理由についての回答の傾向をまとめたものである。この結果から次のことがいえる。

ア．多少であるが，明子さんの証明を「正しいとはいえない」という回答はポストでは増えている(5%)。
イ．アの理由については，プレで「証明の記述」を中心とした「正しい」と判断したものが減り，ポストで「問題の図２以外の場合」について考える必要があることに着目

したものが増えている。
②設問(2)①プレテスト・ポストテストの調査結果と考察
結果から次のことがいえる。
ア．「正しい」と判断したものがプレからポストで 10%程減少している。多くの理由は，証明の内容が足し算であろうと引き算であろうと演算の答えはあっており，等号関係は成り立つことを述べている。通常，証明は円周角の定理に代表されるように演算の結果が負の数になる場合は別の証明の仕方を提示するが，生徒は代数としての世界で処理をすることが自然であると受け止めている表れであろう。
イ．「正しい」「正しいとはいえない」のどちらにも，「明子さんの証明に対して自分の意見を述べる」ものがあり，プレからポストにかけてはその傾向が 7%程減っており，設問に対するきちんとした対応ができるようになり，図と証明の関係やその視点が定まってきた生徒が増えたと考えてよいだろう。
③設問(2)②プレテスト・ポストテストの調査結果と考察
結果から次のことがいえる。
ア．「正しい」と判断したものがプレからポストにかけての結果は大きな変化はなかった。
イ．「正しい」「正しいとはいえない」のどちらにも，「明子さんの証明に対して自分の意見を述べる」ものがあるが，プレからポストにかけてはその傾向が 8%程減っており，「正男さんの意見に対して自分の意見を述べる」が 20%程増え，問に対するきちんとした対応ができるようになり，図と証明の関係やその視点が定まってきた生徒が増えたと考えてよいだろう。
④設問(2)①②のプレテストの調査結果と考察･･･略
⑤設問(2)①②のポストテストの調査結果と考察･･･略
⑥調査全体を通した結果の考察
全体を通して，プレからポストにかけて，生徒の回答には図に対する気づきや図と証明の関係を考えることが増えている。プレからポストの生徒の変容については，証明の内容において傾向が異なる。プレからポストを考察し，図と証明に対する関係を捉える生徒の姿勢は積極的になってきており，これは指導の成果であるといえる。

(D)命題で使われる図の「変数」を，１つから２つ，３つと増やす教材開発の視点

(C)では，証明指導に図の「変数性」･「定数性」に着目する指導や教材開発が生徒の証明の意義や証明の理解に有効に働くことを実証的に示した。ここでは，さらなる視点として図の「変数」を１つから２つ，３つの増やすことによる教材例や指導法を見いだし，実証的に示すことができた。その例が「情報端末を活用した図形課題の探究」の授業である。本研究の意図が充分に発揮できる愛知教育大学飯島康之先生が開発したアプリで，情報端末上で指でそれを動かし，生徒自ら「図の定数性」と「図の変数性」の視点をもつようになり，条件を拡げる意義，つまり，図の「変数」を１つから２つ，３つの増やすことによる図形の性質とその仮定が発見でき，図形の見方が豊かになっていく過程も見ることができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計５件）

・風間喜美江･杉 本 紘 野,図形課題「はとめ返し」の探究－レポート学習の活用を通して－,香川大学教育学部研究報告Ⅱ部第 65 巻第 1 号,2015.3. pp.19-37［査読無］
･風間喜美江, 証明と図の関係の中学生の捉え方，近畿数学教育学会第 28 巻, 2015. 2, pp. 30-40［査読有］
・風間喜美江･杉 本 紘 野, 所与の課題を解決し、そこから探究・発展させる図形学習－レポート学習の活用を通して－, 香川大学教育学部研究報告Ⅱ部第 64 巻第 2 号, 2014. 9. pp. 61-77［査読無］
・風間喜美江, 「数学を学ぶ意味」を実感させるための教師のかかわり合いのあり方, 香川大学教育学部附属教育実践センターニュース No. 39, 2014. 3, p. 3［査読無］
・風間喜美江, 図形命題の仮定を図で思考する証明活動, 日本数学教育学会第４５回数学教育論文発表会論文集第 2 巻，2012.11,pp.845-850［査読有］

〔学会発表〕（計５件）

・風間喜美江,幾何的な豊饒の「図」を顕在させる図形指導，全国数学教育学会第 40 回研究発表会，大阪教育大学天王寺ｷｬﾝﾊﾟｽ(大阪府･大阪市),2014.6.14～15
・風間喜美江,「数学を学ぶ意味」を実感させるための教師のかかわり合いのあり方,香川大学教育学部附属学校園合同研究集会,香川大学教育学部(香川県･高松市),2014.2.27
・風間喜美江,証明活動における図の役割,近畿数学教育学会第 55 回発表会,兵庫教育大学ﾊｰﾊﾞｰﾗﾝﾄﾞｷｬﾝﾊﾟｽ(兵庫県･神戸市),2014.2.22
・風間喜美江, 図から図形を汲み尽くす力, 近畿数学教育学会第 53 回発表会, 神戸女子大学(兵庫県･神戸市), 2013. 2. 23
・風間喜美江, 図形命題の仮定を図で思考する証明活動, 日本数学教育学会第４５回数学教育論文発表会, 奈良教育大学(奈良県･奈良市), 2012. 11～12

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）
〔その他〕

なし

６．研究組織

(1)研究代表者　風間　喜美江
(Kimie　KAZAMA)
香川大学教育学部，教授
研究者番号：００５５２３７４

(2)研究分担者　橋本　是浩
(Yoshihiro　HASHIMOTO)
大阪教育大学教区学部，名誉教授
研究者番号：　０００３０４７９

(3)連携研究者　なし