2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　５ 月 ２０ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５４００３
研究課題名（和文）グレブナー基底理論によるカスプ特異点の研究

研究課題名（英文）Study of cusp singularities by the theory of Groebner basis

研究代表者
石田　正典（Ishida, Masanori）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：３０１２４５４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：トーリック型のカスプ特異点の研究にグレブナー基底の手法を用いる研究を行った．特にカスプ特異点が任意の体上でネーター的な完備局所環として構成されることを示した．また，この局所環のイデアルに先頭項イデアルが定義され，イデアルの比較に多項式環と同様の議論が可能であることを示した．
カスプ特異点の構成と一般化のため，有界とは限らない凸多面体として準多面凸集合を考え，これについての基本的性質や鏡映群が作用する例を調べた．

研究成果の概要（英文）：We studied on toric type cusp singularities with the method of Groebner basis. In particular, we proved that cusp singularities are constructed over any field as noetherian complete local rings. We can define the leading terms ideal for an ideal of the local ring, and use it for comparing ideals similarly as the case of the polynomial ring.
In order to generalize and construct cusp singularities, we defined quasi-polyhedral sets and studied some fundamental properties and examples with the action of reflection groups.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学　代数多様体　トーリック多様体　カスプ特異点　鏡映群　グレブナー基底

１．研究開始当初の背景

カスプ特異点は 2 次元ではヒルベルトモジュラー曲面のコンパクト化に現れる楕円型の特異点であり，非特異化の例外曲線は非特異有理曲線のサイクルとなる．この場合，例外因子の自己交点数の -1 倍の作る 2 以上の整数の巡回列がこの 2 次元カスプ特異点を決定し，特異点のさまざまな不変量がこの整数列およびそれから作られる連分数で記述されることがヒルツェブルフ，カラス，中村郁らの研究で知られている．

カスプ特異点の高次元化としては，一般にはアーベル多様体のモジュライや対称空間の佐武コンパクト化などに現れる特異点を指すことになるが，孤立特異点としては土橋宏康によりトーリック多様体の理論を用いて定義されたカスプ特異点が自然な拡張であり，これを研究対象とした．

階数 r の自由加群を格子点集合として含む r 次元実空間の有理的凸多面錐の複体としての条件を満たす集まりを扇と言い，トーリック多様体はそのような扇に対して定義される．ヒルツェブルフなどによる 2 次元カスプ特異点の非特異化は 実平面のある非特異無限扇に一つの線形変換で生成される無限巡回群が作用していて，その非特異無限扇に対応する非特異トーリック曲面の開部分集合の無限巡回群による商空間として記述される．土橋はこれを一般化して r > 2 についても台が開凸錐となる無限扇に離散群がうまく作用している場合に，対応する r 次元非特異トーリック多様体の適当な開集合をこの離散群で割れば境界部分を一点に解析的に収縮させることができることを発見した．これが土橋によるカスプ特異点である．考えている実空間の双対空間に双対開凸錐とこれを分割する非特異扇を考えることにより，双対カスプ特異点を定義することもできる．この双対カスプ特異点がその性質において元のカスプ特異点とどのような双対性を持つかに興味が持たれた．

計算機数学と共に発展してきたグレブナー基底理論におけるグレブナー基底とその類似は，多項式環の単項式順序の取り方に依存するが，可能な単項式順序全体に位相を入れて空間と考えることも部分環の有効な研究手段であることが知られている．実際，黒田茂はその位相空間のコンパクト性を用いて SAGBI 基底が有限であることの必要十分条件を得ており，また研究代表者はそのような空間がトーリック多様体を定義する扇の，永田雅宜氏が代数多様体の完備可能定理の証明に用いた，ザリスキ・リーマン空間にあたることを示して，扇の完備化に応用している．カスプ特異点の場合もこの位相空間を離散群の作用で割ればコンパクトとなると考えられるので，それを示してその局所環の環論的研究への応用が期待できた．

このカスプ特異点については佐武一郎や尾形庄悦により開凸錐の特性関数を用いて定義されたゼータ関数の 0 での値やヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理を適用する場合に必要となる Todd 種数などの不変量があり，ゼータ 0 値が双対カスプ特異点の Todd 種数に対応するという双対性定理が奇数次元の場合は尾形により，一般次元では研究代表者により示されている．また 4 次元までぐらいであれば具体例についてゼータ 0 値や Todd 種数を計算機で求めることも可能となっていた．

２．研究の目的

本研究の目的は，トーリック多様体の理論を用いて定義される一般次元のカスプ特異点を計算機数学の手法であるグレブナー基底の理論を用いて解明しようとするものである．カスプ特異点の局所環は完備化した半群環の群の作用による不変式環としての記述が可能なので，単項式順序を与えれば先頭項などの定義はできるが，不変式環のグレブナー基底の類似については，多項式環の部分環についての SAGBI 基底と同様に，有限性は期待できない．しかし定義方程式の確定などの問題を具体例を用いて研究することにより困難を乗り越える有効な方法を見つけ出すことは可能と考えられるので，これを目標に理論面と計算機を用いた計算の両面から研究を行おうと考えた．多項式環の有限群の作用による不変式環の場合，SAGBI 基底が有限となるための必要十分条件は，群の作用が擬鏡映写像で生成されていることであることが黒田茂氏の研究により知られている．カスプ特異点はトーリック多様体の境界の近傍に自由に作用する群の作用による商空間から定義されるが，オービフォールドに相当する場合に拡張して考えることも可能である．そのようにカスプ特異点を拡張した場合，SAGBI 基底が有限になることもあると考えられ，離散群のトーリック多様体への作用が局所的に擬鏡映写像となる場合の研究も目的の一つであった．

2 次元のカスプ特異点は 3 以上の整数を少なくとも一つ含む 2 以上の整数の巡回列を任意に与えれば実例が構成できて，しかもそれらがすべての 2 次元カスプ特異点である．3 次元のカスプ特異点は，土橋による構成法としてコンパクトな実曲面の三角形分割の各辺の両端に適当な条件を満たす整数を与えて，それから作る方法がある．また一般次元では総実代数体から得られるヒルベルトモジュラーカスプ特異点など数論的な離散群から与えられるもがあり，その意味で例は多いが，その他の例を与えるのは容易ではない．特に，すべての次元にヒルベルトモジュラーカスプ特異点以外のカスプ特典が存在するかわかっていない．4 次元カスプ特異点としては研究代表者による星状化可能多角凸錐とその鏡映写像で生成される離散群と開凸錐によ

る例があるが，同様に鏡映により構成できるものなど，その他の例の構成法についても研究したいと考えた．

カスプ特異点の局所環のイデアルについてもグレブナー基底の手法を有効とする理論を作ることも目的とした．グレブナー基底と同様に考えようとした場合，不変部分環をとる段階で有限性が崩れることはイデアルを考える場合にも困難を与えるが，不変部分環の無限性をうまく有限性の組合せに置き換えることにより，多項式環のイデアルの場合と同様な計算が可能にできるものと考えられた．困難な点も多くあるので，グレブナー基底と呼べない方法も必要であれば導入することにより，これまで述べたように目標を定めて取り組みたいと考えた．

３．研究の方法

この研究は代数幾何学，可換環論，組み合わせ論に深く関係しており，国内外に関係する研究者は多くいたので，研究集会などに参加して最新の研究成果を交換して研究を促進した．

扇の理論における凸錐は，代数多様体のアフィン開集合に対応するアフィン環に相当する．この観点から可換環論および組み合わせ論と関係した部分を調べた．特に多項式環のイデアルのグレブナー基底の理論の様々な応用との関係も調べた．したがって，これに関係した研究集会への参加や国内の関連した研究者との意見の交換を行った．また関連した研究を行っている国内の研究者を東北大学に招いて講演を依頼したり討論を行い研究に役立てた．

４．研究成果

トーリック型のカスプ特異点の研究にグレブナー基底の手法を用いる研究を行った．特にカスプ特異点が任意の体上でネーター的な完備局所環として構成されることを示した．
この証明には不変式環の完備局所環としての有限生成性の証明が必要であるが，そのために，不変式論における有限生成環の有限群の作用による不変式環がまた有限生成環となるという定理を一般化して，有限生成半群環への有限亜群の作用による不変式環の有限生成性を示し，これを用いた．また，この局所環のイデアルに先頭項イデアルが定義され，イデアルの比較に多項式環と同様の議論が可能であることを示した．この結果については 2012 代数幾何学城崎シンポジウム記録に“The graded rings associated to cusp singularities”の題で掲載されている．

トーリック多様体理論の重要な定理として，射影的トーリック多様体はアンプルな直線束を指定すれば格子点にすべての頂点をもつ凸多面体で記述される．これを一般化して有界とは限らない局所的に有理凸多面体となっている凸集合とこれに対応するトーリック多様体を考えることも出来る．ただし，これではあまりに一般的なので適度の条件を付けて考えることが必要となる．

カスプ特異点の構成と一般化のため，有界とは限らない凸多面体として準多面凸集合を考え，これに cc 次元を特性錐の次元として定義した．これは代数多様体の分類論における小平次元と同様の役割を果たすものと考えられる．r 次元実空間の準多面凸集合の場合，cc 次元は 0 から r の値をとり得るが，これが最大の r の場合が一般型で，カスプ特異点は次のような準多面凸集合 P から構成できることがわかった．

(1) P は一般型，すなわち P の cc 次元は r である．
(2) P 自身以外の面がすべて有界な凸多面体である．
(3) 格子点集合を不変にし P に自由に作用する線形離散群があって，面の集合のこの群の作用による商は有限である．

これらの条件のうちで (3) を群の作用が固定点を持っても良いと条件を弱めれば構成がかなり容易になる．有理多角凸錐余次元 1 の面についての鏡映変換で生成される鏡映群あるいはコクスター群と呼ばれる離散群がその例となる．

有理的な準多面凸集合についての基本的性質や鏡映群が作用する例を調べたが，まだ多くの問題を未解決で残すことになった．得られた結果の一部は“Cusp singularities and quasi-polyhedral sets”の題で Proceedings of Kyoto Workshop "Algebraic varieties and automorphism groups" に投稿中である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

<u>Masanori Ishida</u>,
The moduli space of Catanese-Ciliberto-Ishida surface, Osaka J. Math., 50, (2013), 115-133, 査読有.
<u>http://projecteuclid.org/euclid.ojm</u>

<u>Masanori Ishida</u>, The graded rings associated to cusp singularities, 2012 代数幾何学城崎シンポジウム記録，北海道大学数学講究録，155，(2013)，41-50．査読無

〔学会発表〕（計 5 件）

<u>石田正典</u>，可換環としてのトーリック型カスプ特異点,代数幾何学城崎シンポジウム，
兵庫県城崎大会議館，

2012 年 10 月 24 日,
兵庫県豊岡市

石田正典, カスプ特異点を定義する扇について,杜の都代数幾何学研究集会,
東北大学大学院理学研究科,
2013 年 2 月 14 日,
宮城県仙台市

石田正典, カスプ特異点とグレブナー基底,
第 11 回アフィン代数幾何学研究集会,
関西学院大学大阪梅田キャンパス,
2013 年 3 月 4 日,
大阪市

石田正典,
Cusp singularities and discrete groups generated by reflections,
RIMS 研究集会 Kyoto Workshop "Algebraic Varieties and Automorphism Group",
京都大学数理解析研究所,
2014 年 7 月 7 日,
京都市

石田正典, カスプ特異点を記述する形式扇の導入, 第 2 回杜の都代数幾何学研究集会,
東北大学大学院理学研究科,
2014 年 1 月 10 日,
宮城県仙台市

６．研究組織

研究代表者
石田 正典 (Masanori Ishida)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30124548