様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ４ 月 ２５ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５４００６

研究課題名（和文）遠アーベル幾何における計算代数的アプローチ

研究課題名（英文）Computational Algebraic approach to anabelian geometry

研究代表者
中村　博昭（Nakamura, Hiroaki）

大阪大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：６０２１７８８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：写像類群の重みフィルター付けから生じる次数加群やそれを包含する導分作用素のなす加群に生じる対称群の表現を既約分解する計算について考察を進め，とくに種数０の場合のJohnson準同形の安定像について進展をみた．有理数体上定義されるX字・Y字状の平面樹木型グロタンディークデッサンについて計算代数的アプローチを進め，Pakovich-Zapponi の手法で付随する種数１のグロタンディークデッサンを算出し，注目に値する実例の系列を明らかにした．

研究成果の概要（英文）：We studied computational aspects of irreducible decomposition of graded modules arising from weight filtrations of mapping class groups of surfaces. In particular, we obtained results that fix certain parts of the stable image of the Johnson homomorphism in the case of genus zero. We also advanced a computational algebraic approach to X-shape, Y-shaped plane trees defined over the rational number field, and found several remarkable series of Pakovich-Zapponi type examples of Grothendieck dessins of genus one associated with them.

研究分野：代数学

キーワード：遠アーベル幾何　曲面写像類群　グロタンディークデッサン　楕円曲線　分岐被覆

１．研究開始当初の背景

代数曲線やそのモジュライ空間の基本群に生じる数論的不変量の理解を深めることで，数論的多様体としての性質が不変量に反映する様子を記述し特徴づける問題は１９８０年代の Grothendieck の遠アーベル幾何構想に代表され、１９９０年代から我が国の研究者が枢要な役割を果たす中で高度に発展してきた．代数曲線やそのモジュライ空間など幾何学的基本群が「アーベル群からほど遠い」代数多様体のあるクラスは，その数論的な性質が算術的基本群における絶対ガロア群の強い関与の仕方を見ることで制御できるであろうという発想を基幹としている．
1990 年代から代数曲線の基本群に関する主予想の解決やその様々な精密化が進むとともに，伊原による数論的ベータ関数や ℓ 進アソシーターの理論が，Deligne 等による混合 Tate モチーフの理論や Drinfeld による Grothendeick- Teichmueller 理論を通じて多重ゼータ値など昨今の目覚ましい成果とも深く関連するとともに，有理点に関する切断予想など未解決問題も残しながら国際的に研究の広がりを見せている．このことは，2009 年の秋に京都大学数理解析研究所において筆者が主催した「第３回日本数学会季期研究所」国際研究集会の成功などにつながっていた．

２．研究の目的

代数的エタール基本群がエタール被覆の対称性の極限であるという事情から，多くの研究が，基本群の内部の群論的情況を，被覆空間の数論的コホモロジー群に現れる不変量の言葉に翻訳し，被覆の塔を登るプロセスに沿って情報を集約するという手法原理をとる．しかしながら，理論が精緻になるにつれ，使われる概念や用語・証明の細かいステップを支える技術の抽象度が増しているため，周辺分野の研究者には，この分野の草創期に比べ，近づきにくい(入り口が見えにくい) 傾向が次第に認識される状況もある．このような理論を打ち立てるための舞台裏では，ときに計算機による実験を行い，各種のテーブルを作成し予想を立てたり証明の正しさを確認したりといった作業が並行し，主役を演じる概念に思考が導かれるための重要なターニングポイントにこうした計算による試行錯誤が鍵となることも少なくない．しかしながら通例の論文の中では，こうしたデータは脇役として背景に退き，ごく一部分を例として短く記述せざるを得ない．
この研究課題では，高度な抽象化により若手研究者の新規参入が困難になっている状況を踏まえ，こうした難点を軽減する方向として，具体的に計算可能な不変量を取り出し近年発達の著しい計算代数的手法でアプローチが可能な切り口を実験的に追求してみせることを主な目的とした．

３．研究の方法

写像類群の Johnson 準同型の様子を調べるのに，(リーマン面の基本群としての)自由群や曲面群の重みフィルター付け(一般には中心降下列より緩い速度で 1 に収束する)に付随して生じる各種の次数つき加群を，曲面のホモロジー群に作用するシンプレクティック群 Sp(2g)や曲面にあけた穴を置換する対称群の作用で分解することが第１歩であるが，これらの群の既約表現はヤング図形を用いて分類されているので，表現の指標を表す対称式を構成して分解する作業に帰着する．その際，手計算で出来る低次を超えて理論的に意味のある一定の予測を立てるのには計算機を用いた高次の加群まで計算する必要があり，研究代表者は既に１９９０年代から着手している．その一部は M.Asada, H.Nakamura : "On graded quotient modules of mapping class groups of surfaces" Israel J. Math. 90 (1995), no. 1-3, 93–113 等に示唆してあるが，大部分は未発表のままごく一部の同僚専門家に情報提供している状況である．

$\mathrm{gr}^1\Gamma_{g,n}^{\mathrm{alg}} =$
$+\ s[n]\otimes sp[1, 1, 1]$
$+\ (s[n]+s[n\text{-}1, 1])\otimes sp[1]$

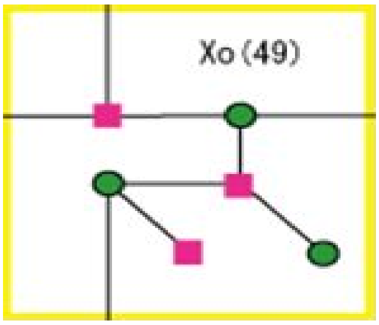
$\mathrm{gr}^2\Gamma_{g,n}^{\mathrm{alg}} =$
$+\ s[n]\otimes sp[2, 2]$
$+\ (s[n]+s[n\text{-}1, 1])\otimes sp[1, 1]$
$+\ (s[n]+s[n\text{-}1, 1]+s[n\text{-}2, 2])\otimes sp[0]$

$\mathrm{gr}^3\Gamma_{g,n}^{\mathrm{alg}} =$
$+\ s[n]\otimes sp[3, 1, 1]$
$+\ s[n]\otimes sp[3]$
$+\ (s[n]+s[n\text{-}1, 1])\otimes sp[2, 1]$
$+\ (s[n\text{-}1, 1]+s[n\text{-}2, 1, 1])\otimes sp[1]$

$\mathrm{gr}^4\Gamma_{g,n}^{\mathrm{alg}} =$
$+\ s[n]\otimes sp[4, 2]$
$+\ s[n]\otimes sp[3, 1, 1, 1]$
$+\ s[n]\otimes sp[2, 2, 2]$
$+\ (2*s[n]+s[n\text{-}1, 1])\otimes sp[3, 1]$
$+\ (2*s[n]+s[n\text{-}1, 1])\otimes sp[2, 1, 1]$
$+\ (4*s[n]+3*s[n\text{-}1, 1]+s[n\text{-}2, 2])\otimes sp[2]$
$+\ (s[n\text{-}1, 1]+s[n\text{-}2, 1, 1])\otimes sp[1, 1]$
$+\ (s[n\text{-}2, 1, 1]+s[n\text{-}3, 1, 1, 1])\otimes sp[0]$

実際，上の表の低次の例から観察されるように，代数的写像類群の重み次数加群の既約表現への分解の様子は，対称群の既約表現としてのヤング図形 s[*] とシンプレクティック群の既約表現としてのヤング図形 sp[*] のテンソル積の和に分解される．(ここに[*]は対応するヤング図形の partition 表示である．) 種数→∞ についてはヤング図形は完全に安定し，穴の数→∞については，ヤング図形の第２腕以下が安定することが見て取れる．

このような計算を実行するためのプログラムを改良し，とくに穴の数にたいする安定性について知見を深めることを行う必要がある．
また簡単そうで意外と手ごわい課題としては，グロタンディーク・デッサンのうち種数１のものの Belyi 関数の算出が挙げられる．例えば，種数１の楕円モジュラー曲線　の上にある７次の Belyi 関数で [7,331,331] 型のモノドロミーを持つものなども，具体的に計算 (K.Hoshino, H.Nakamura: "Belyi function on X_0(49) of degree 7" Math. J. Okayama Univ. 52 (2010)) されており，そのグロタンディーク・デッサンは図のようなタイルによる平面敷き詰めで実現される．



これは散発的な例に過ぎないが，次数が高くなると(７次くらいでも) 計算機での単純な算出は難しく，数学的知識を用いた工夫を要する．課題は，より系統的な手法で構成できる例の追求，とくに Mordell-Weil 群の rank が正になる場合が多く見つけられれば Elkies や Zagier の研究で ABC 予想のニアミス例の構成と関係していて興味深いものである． テータ関数を用いた 1990 年代の L.Zapponi 等の研究も，幾つかの思いがけない側面があり，これについては 2008 年５月香川セミナーでの講演で注意したが， より系統だてて追求する余地がある．

４．研究成果
平成２４年度は,写像類群の重みフィルター付けから生じる次数加群やそれを包含する導分作用素のなす加群に生じる対称群の表現を既約分解する計算について考察を進めた．とくに英国ケンブリッジのニュートン研究所におけるプログラム"Grothendieck-Teichmueller Groups, Deformation and Operads (GDO)" に参加して，F.Brown 博士との共同研究を開始することにより，従来よりも計算アルゴリズムを格段に改良することが可能となり,算出次数の範囲を倍増させることが出来た．その計算結果を詳細に観察することにより，Johnson 準同型に関して以前立てた予想のひとつのエビデンスが強化されるとともに，新たに顕著な現象が存在する可能性が見いだされ，いくつかの予想の一つには証明を与えることが出来た．このため Brown 博士との共著論文について執筆方針について意見をまとめた．
このほかに楕円曲線の特別な族に関する情報や，アルチン組み紐群・２橋結び目などのアルゴリズム的側面について情報を収集し，またこの研究課題での利用が有効と思われる非可換語の取扱いについて最近の著しい進展について知見を広げることが出来た．
これらとともに,アソシエーターに関する Wojtkowiak 氏との共同研究であるエル進多重対数関数の岩沢理論的な振る舞いについて検証を進め,次年度に向けて継続的に考察する課題とした．

平成２５年度前半は,写像類群のジョンソン準同型についての課題に関する現状整理を行い,考察の範囲を広げた．とりわけ２０１３年５月３日から７日の週に東京大学大学院数理科学研究科において,同研究科の河澄響矢氏と逆井卓也氏と共同開催の形で Workshop “ Johnson homomorphisms ”という集会名の国際研究集会を企画実施した．この中で位相幾何学と数論の両側面から内外の専門家を招き最先端の研究結果を発表していただいた．多くの講演において Johnson 準同型に関連する重要な進捗が報告され，森田障害， 榎本-佐藤障害,マグナス展開 ,Burau 表現 ,交叉２重括弧 , Goldman-Turaev Lie bialgebra,ガロア障害,非アーベル岩沢理論などをキーワードとして活発な研究交流が行われ有意義であった．また筆者自身も Some observation in Johnson homomorphisms というタイトルで講演を行い，当該課題の進捗状況の一部について報告した．９月に研究拠点を岡山大学から大阪大学に移動することになり,研究資料の梱包や計算機環境の慎重を期したバックアップなどに予想外の時間と労力を費やしたが,ファイルや書籍の整理の合間にいくつか埋もれていた事項に注意を向けることもできて,それらの当該課題との関連づけや位置づけについて若干の認識の進歩も見られた．
年度後半になり，大阪大学において計算機環境を含む研究環境を一新したあとは，楕円曲線に関連する計算を試行し,当該課題に関係する問題についてもプログラムの改良と若干のデータの蓄積を得ることが出来たため，この方向性を主軸に,次年度におけるテーマ継続につなげた．

平成２６年度は，Pakovich-Zapponi により研究された平面上の X・Y 字型のグロタンディーク・デッサンと楕円曲線の上のベリー関数の対応を詳細に検証し，特に X 字型のデッサンの分類に関して，レベルつきの楕円曲線の不変族に関する Kubert 方程式のモーデル変換に連分数展開のアルゴリズムを組み合わせる方法を数式処理ソフトを用いた計算機実験に組み上げ，計算を実行した．
この結果，いくつかの類型に系列的にまと

められることが分かり，On mono-nodal tree and genus one dessins of Pakovich-Zapponi type というタイトルのプレプリントとしてまとめた．応用として，これまで注目されていなかった興味深い tree dessin の事例が得られ，今後の継続的な考察のための萌芽的な足掛かりになることが期待される．
例えば，とりわけ著しいものとして，長さが巡回的に(1,5,13,5) の枝をもつ次数２４の X 字型平面ツリーデッサンが特異な例として確認され，それに付随した有理数体上定義されたクレモナラベル[96a4]の楕円曲線

$$y^2 = x^4 - \frac{7}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{47}{256}$$

上で定義された種数１のデッサンが特に注目に値する実例として得られた.
これらの内容については，１０月のフランスのルミニー数学研究所で行われた国際研究集会 "Braids and Arithmetic"における On Grothendieck dessins and ellitpic curves というタイトルで研究発表や，１２月にはスペインのマドリードで行われた国際研究集会 "Workshop on Multiple Zeta Values, Modular Forms and Elliptic Motives II" における Monodromy of elliptic curves and Mordell transformations in Grothendieck-Teichmueller theory というタイトルで発表などの，海外の研究拠点を含むいくつかの機会を通じて，内外の専門家とも議論を行ない有意義な国際交流を行った.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計５件）

1. Hiroaki Nakamura
   On Grothendieck dessins and elliptic curves，“Seinaire d'algebre, geometrie et topologie”, Laboratoire de Mathematiques J.A. Dieudonne, Universitede Nice - Sophia Antipolis, Nice, February 5, 2015,

2. Hiroaki Nakamura
   Monodromy of elliptic curves and Mordell transformations in Grothendieck-Teichmueller theory, "Workshop on Multiple Zeta Values, Modular Forms and Elliptic Motives II", Instituto de Ciencias Mateaticas, Universidad Autonoma de Madrid ,Madrid, December 1-5, 2014.

3. Hiroaki Nakamura,
   On Grothendieck dessins and elliptic curves, Workshop "Braids and Arithmetic", CIRM, Luminy, Marseille, October 13--17, 2014.

4. Hiroaki Nakamura
   Introduction to Grothendieck-Teichmueller theory I, II, Workshop "Braids and Arithmetic", CIRM, Luminy, Marseille, October 13--17, 2014.

5. Hiroaki Nakamura
   Some observation in Johnson homomorphisms, Workshop "Johnson homomorphisms", University of Tokyo, May 3 - May 7, 2013.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~nakamura/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者

中村博昭 （NAKAMURA Hiroaki）
大阪大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：６０２１７８８３