

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 21 日現在

機関番号：15401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654012

研究課題名(和文) カンドル代数と離散的な対称空間

研究課題名(英文) Quandles and discrete symmetric spaces

研究代表者

田丸 博士 (Tamaru, Hiroshi)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：50306982

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：カンドル代数に対して、リーマン幾何に登場する二点等質性の類似の概念を定義し、有限な二点等質カンドルの分類を得た。(元の個数が素数の場合は研究代表者によるものであるが、一般の場合は研究協力者によって得られたものである。)また、カンドル代数に対して平坦の概念を定義し、平坦な連結有限カンドルの分類を得た。平坦性の概念を定義する際には、曲率を経由するのではなく、リーマン対称空間における変換群を用いた平坦性の特徴付けを用いた。

研究成果の概要(英文)：We introduced the notion of two-point homogeneous quandles, which is an analogy of the notion of two-point homogeneous Riemannian manifolds, and classified those with finite cardinality (The prime cardinality case has been completed by the Principal Investigator, and other case by a Research Partner). We also defined the notion of flat quandles, and classified finite connected ones. The notion of flatness was not defined by curvatures, but a characterization of flat Riemannian symmetric spaces in terms of the transformation groups.

研究分野：微分幾何

キーワード：カンドル 対称空間 二点等質 平坦性

### 1. 研究開始当初の背景

カンドル代数は、所定の公理をみたす二項演算をもつ代数系であり、その公理は結び目のライデマイスター移動と対応している。カンドル代数は、Joyce によって導入されて以降、結び目の研究等に活発に応用されてきた。一方で、対称空間はカンドル代数の構造をもつ。このことは Joyce によって既に指摘されていたが、これら両者を結びつけた研究は、本研究開始以前には殆どなかったと思われる。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、カンドル代数を離散的な対称空間と考えると、その構造理論を構築することである。特に以下の二点を大きな目的とした：

- (1) カンドル代数や結び目の研究に対称空間論を持ち込む。すなわち、カンドル代数の構造を対称空間論で用いられているアイデアや道具を適用して調べ、その成果を結び目の研究に応用する。
- (2) 離散的な対称空間論を構築する。すなわち、対称空間論における様々な概念を、点対称だけの情報で再定式化し整備し、カンドル代数に移植（離散化）し、その性質を調べる。

### 3. 研究の方法

対称空間の研究に用いられている概念のうち、点対称だけを用いて定義されるものについては、自然に類似物をカンドルに対して定義することができる。まずはそのような概念を定式化し、その性質をみたすカンドルを調べる。

また、対称空間論に登場する概念のうち、点対称だけを用いて特徴付けることができるものを考察する。このことは、対称空間論の再構築という側面をもち、さらに上記の定式化によってカンドルへの移植が容易になる。

### 4. 研究成果

- (1) リーマン幾何に登場する二点等質性の概念をカンドルに対して定義し、元の個数が素数であるような二点等質カンドルの分類を得た。この結果は、論文として既に発表されている。さらにこの研究は研究協力者によって継続され、最終的には有限な二点等質カンドルの分類が得られた。分類は、有限体の原始根との対応を明示的に与えるものであり、今後の研究の広がりや応用に強い可能性を示すものとなった。
- (2) 対称空間は、対称対と呼ばれる所定の性質をみたすリー群と部分群の組と対応

することが良く知られている。そこで、カンドルに対しても類似の概念(カンドル組と呼ぶ)を定義し、等質なカンドルとカンドル組の間に対応が存在することを示した。この結果は、いくつかの研究集会の記録集に掲載した。

- (3) 連結リーマン対称空間に対して、その平坦性を点対称だけを用いて特徴付けることができる。その特徴付けを用いて、カンドルに対しても平坦性を定義し、有限かつ連結な平坦カンドルの分類を行った。リーマン対称空間に対する極大平坦部分空間、あるいはコンパクトリー群に対する極大可換部分群などは、その構造理論において極めて重要な役割を果たしている。我々の導入した平坦なカンドルも、今後のカンドルの構造理論の進展に於いて、重要な役割を担うことが期待される。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 15 件)

1. 田丸 博士; 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part II. In: 研究集会「部分多様体論・湯沢 2014」記録集, 2015, to appear. 査読無.
2. Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Hiroshi Tamaru; Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces. Tohoku Math. J., to appear. 査読有.
3. Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, Kazuhiro Terada; Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups. J. Math. Soc. Japan, to appear. 査読有.
4. Shinobu Fujii, Hiroshi Tamaru; Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres --- Hermitian cases. Transf. Groups, to appear. 査読有.  
DOI: 10.1007/s00031-015-9305-1
5. Sadahiro Maeda, Hiroshi Tamaru; Naturally reductive homogeneous real hypersurfaces in a nonflat complex space form. In: Topology Appl. (Special Issues), to appear. 査読有.
6. 田丸 博士; 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part I. In: Geometry and Analysis (福岡大学微分幾何研究会 2014 記録集), 99--107 (2015). 査読無.
7. Hiroshi Tamaru; Group actions on symmetric spaces related to left-invariant geometric structures. In: Development of group actions and submanifold theory. In: RIMS Kokyuroku 1929 (2014), 1--12. 査読無.
8. Takuya Fujimaru, Akira Kubo, Hiroshi

- Tamaru; On totally geodesic surfaces in symmetric spaces of type AI. In: Real and Complex Submanifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 106 (2014), 211--227. 査読有. DOI: 10.1007/978-4-431-55215-4\_19
9. Carlos Olmos, Silvio Reggiani, Hiroshi Tamaru; The index of symmetry of compact naturally reductive spaces. Math. Z. 277 (2014), 611--628. 査読有. DOI: 10.1007/s00209-013-1268-0
  10. Akira Kubo, Hiroshi Tamaru; A sufficient condition for congruency of orbits of Lie groups and some applications. Geom. Dedicata 167 (2013), 233--238. 査読有. DOI: 10.1007/s10711-012-9811-4
  11. Jürgen Berndt, Hiroshi Tamaru; Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type. J. Reine Angew. Math. 683 (2013), 129--159. 査読有. DOI: 10.1515/crelle-2012-0002
  12. Hiroshi Tamaru; Two-point homogeneous quandles with prime cardinality. J. Math. Soc. Japan 65 (2013), 1117--1134. 査読有. DOI: 10.2969/jmsj/06541117
  13. Hiroshi Tamaru; The space of left-invariant metrics --- on a generalization of Milnor frames. In: Proceedings of The Seventeenth International Workshop on Diff. Geom. 17 (2013), 55--65. 査読無.
  14. Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Hiroshi Tamaru; Some topics of homogeneous submanifolds in complex hyperbolic spaces. In: Differential Geometry of Submanifolds and its Related Topics, 230--244, World Scientific, 2013. 査読有. DOI: 10.1142/9789814566285\_0020
  15. Tatsuyoshi Hamada, Yuji Hoshikawa, Hiroshi Tamaru; Curvatures properties of Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space. J. Geom. 103 (2012), 247--261. 査読有. DOI: 10.1007/s00022-012-0127-1
- [学会発表](計 25 件)
1. Hiroshi Tamaru; The space of left-invariant metrics and submanifold geometry, AMS Special Session on Ricci Curvature for Homogeneous Spaces and Related Topics, San Antonio (米国), 2015/01/10.
  2. 田丸 博士; Quandles and a discretization of the theory of symmetric spaces, 部分多様体論・湯沢 2014, 湯沢グランドホテル(新潟県南魚沼郡), 2014/11/22.
  3. 田丸 博士; 対称空間論の離散化とカ
  - ドル代数, 上智大学談話会, 上智大学(東京都区内), 2014/11/07.
  4. 田丸 博士; 対称空間論の離散化とカドル代数, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス(福岡県福岡市), 2014/11/01.
  5. Hiroshi Tamaru; The space of left-invariant metrics, The 10th Geometry Conference for the Friendship between China and Japan, Fudan University (中国), 2014/09/11.
  6. Hiroshi Tamaru; On totally geodesic surfaces in symmetric spaces of type AI, ICM 2014 Satellite Conference on Real & Complex Submanifold, Daejeon (韓国), 2014/08/11.
  7. Hiroshi Tamaru; Group actions on symmetric spaces related to left-invariant geometric structures, Development of group actions and submanifold theory, RIMS (京都府京都市), 2014/06/25.
  8. Hiroshi Tamaru; An interaction between geometry of left-invariant metrics and group actions on symmetric spaces, Submanifold Geometry and Related Topics, 大阪市立大学(大阪府大阪市), 2014/04/14.
  9. Hiroshi Tamaru; Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in noncompact symmetric spaces, Colloquium of Department of Mathematics, Gwangju (韓国) 2014/02/20.
  10. Hiroshi Tamaru; The space of left-invariant metrics --- on a generalization of Milnor frames, 17th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields and the 7th KNUGRG-OCAMI Differential Geometry Workshop, Daejeon (韓国), 2013/09/30.
  11. 田丸 博士; 対称空間と等質部分多様体(2), 幾何学阿蘇研究集会, 休暇村南阿蘇(熊本県阿蘇郡), 2013/09/10.
  12. 田丸 博士; 対称空間と等質部分多様体(1), 幾何学阿蘇研究集会, 休暇村南阿蘇(熊本県阿蘇郡), 2013/09/09.
  13. Hiroshi Tamaru; Warming up lecture "Preliminaries on parabolic subalgebras", 第11回秋葉原セミナー, 首都大学東京・秋葉原サテライトキャンパス(東京都区内), 2013/08/11.
  14. Hiroshi Tamaru; Left-invariant metrics on Lie groups and submanifold geometry, International Workshop on Special Geometry and Minimal Submanifolds, 東北大学(宮城県仙台市), 2013/08/09.
  15. 田丸 博士; 左不変計量の成す空間 --- ミルナー枠の一般化について, 談話会兼松江セミナー, 島根大学(島根県松江

- 市), 2013/07/17.
16. 田丸 博士; Left-invariant metrics on Lie groups and submanifold geometry, 談話会, 大阪大学 (大阪府豊中市), 2013/06/17.
  17. Hiroshi Tamaru; Left-invariant metrics on Lie groups and submanifold geometry, 第 8 回代数・解析・幾何学セミナー, 鹿児島大学 (鹿児島県鹿児島市), 2013/02/20.
  18. Hiroshi Tamaru; On the moduli space of left-invariant metrics on a Lie group, Submanifold Theory in Symmetric Spaces and Lie Theory in Finite and Infinite Dimensions, 大阪市立大学 (大阪府大阪市), 2013/02/03.
  19. 田丸 博士; リー群上の左不変計量の幾何と部分多様体論, 微分幾何学火曜セミナー, 筑波大学 (茨城県つくば市), 2013/01/08.
  20. 田丸 博士; リー群上の左不変擬リーマン計量の成す空間について, 合宿セミナー 2012 in 蒜山 -- リー群と幾何構造 --, 休暇村蒜山高原 (岡山県真庭市), 2012/11/18.
  21. 田丸 博士; リー群上の左不変計量の幾何と部分多様体論, OCU48 セミナー, 大阪市立大学 (大阪府大阪市), 2012/11/10.
  22. 田丸 博士; 非コンパクト対称空間内の等質超曲面の幾何と応用, 非可換幾何学と数理物理学 2012, 慶應義塾大学 (神奈川県横浜市), 2012/09/14.
  23. 田丸 博士; 非コンパクト対称空間への群作用とその応用, 第 59 回幾何学シンポジウム, 九州大学 (福岡県福岡市), 2012/08/27.
  24. 田丸 博士; 複素双曲空間内の等質部分多様体に関するいくつかの話題, 部分多様体の微分幾何学及び関連課題--前田定廣先生還暦記念研究集会--, 佐賀大学 (佐賀県佐賀市), 2012/08/05.
  25. 田丸 博士; 非コンパクト対称空間の等質部分多様体の幾何学 (全 3 回), 秋葉原微分幾何セミナー, 首都大学東京・秋葉原サテライトキャンパス (東京都区内), 2012/07/14.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田丸 博士 (TAMARU HIROSHI)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号 : 50306982

### (2) 連携研究者

なし

### (3) 連携研究者

阿賀岡 芳夫 (AGAOKA YOSHIO)  
広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 50192894

澁谷 一博 (SHIBUYA KAZUHIRO)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号 : 00569832

鎌田 聖一 (KAMADA SEIICHI)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号 : 60254380