様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２６ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５４０１６

研究課題名（和文）離散幾何学の新展開ー有限群の形を見る

研究課題名（英文）New approach to discrete geometry --- capturing the shape of finite groups

研究代表者
井関　裕靖（IZEKI, Hiroyasu）

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：９０２４４４０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は離散距離空間の高次元的な構造を見出すことにより離散距離空間の「形」を捉え、さらにこれを離散群の剛性理論等へ応用することを目標としていた。離散距離空間の「高次元的な構造」を満足な形で捉えることは叶わなかったが、その研究過程で得られた観察や結果から、ある種のランダム群が非正曲率空間に対する強い固定点性質をもつことを示すことができた。また、離散距離空間の非正曲率距離空間への埋め込みに対するスペクトルギャップの幾つかの評価を与えることにも成功した。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research was capturing the higher dimensional structure of discrete metric spaces and getting some rigidity results as applications of this structure. We could not obtain a satisfactory result describing the higher dimensional structure of discrete sets, however, using an observation and results obtained in the course of this research, we proved that certain random groups have strong fixed-point property for a wide class of nonpositively curved metric spaces. Also we gave some good estimates of nonlinear spectral gap for some embeddings of discrete metric spaces into nonpositively curved metric spaces.

研究分野：微分幾何学

キーワード：離散距離空間　離散群　剛性

## １．研究開始当初の背景

離散的な対象はその構造が貧弱なゆえ，研究の手段が必ずしも豊富ではなく，深い理解に到達するのも決して容易ではない．そのため，より構造が豊富な「連続的な対象で近似する」アプローチをとることも多い．例えば，石鹸膜(シャボン玉)は物理学的には有限個の粒子からなる離散集合だが，我々の目には滑らかな曲面のように見える．そこで，石鹸膜を滑らかな曲面として扱うと，微分幾何学および解析学を駆使することにより，その形状を極小曲面として数学的に説明することが可能になる．しかしながら，本来の有限離散集合の構造からその形状を説明することは現在でも極めて困難だと思われる．

「離散集合を連続的な対象で近似する」というアプローチは少し異なる分野でも非常に成功を収めている．例えば，その一つとして，Lie 群の格子に関する研究を挙げることができる． Lie 群 G の離散部分群Γは，G/Γが Haar 測度に関して有限体積になるとき，つまり，Lie 群の中に均等に広がって分布しているようなときに格子と呼ばれる．格子は無限離散群の中でもよく理解されているものだが，その理解は,格子を直接扱うことにより得られたというよりは，格子を含む Lie 群に対する研究が進んだ結果として得られたものである. Lie 群は，群でありかつ多様体の構造をもつので，その分, Lie 群を理解するために使える言葉，技法は豊かになる．この場合も「Lie 群で格子を近似する」ことにより格子の研究の進展があったといえる．

一方，近年，格子以外の無限離散群に対する研究が進展を見せているが，このような群は，格子に対する Lie 群のような，連続的な「容れ物」をもたない．そのため，離散集合を直接に幾何学的対象として扱わなければならず，Lie 群の格子の研究に用いられた手法がそのままでは適用できない．このような研究を推し進めるためにも，「離散集合の形」を適切に定義し，離散集合の幾何学をより豊かにする必要があると考えるに至った．

## ２．研究の目的

一般的な離散集合に「形」を与える一つの方法は，2 点の組にウェイトを定めることにより，ウェイト付きグラフの構造を与えることである．例えば，離散距離空間としての離散集合は，2 点間の距離をウェイトとして与えられた完全グラフとみなすことができる．このようなウェイトは離散集合に 1 次元的な構造を与えていることになる．本研究は，離散集合に，より高次元的な構造を与えることにより，離散集合によりよい「形」を与え，幾何学的により興味深い研究対象とすることを試みる．とくに，対象とする離散集合として有限群をとったとき，有限群の「形」が正しく捉えられるような高次元的な構造を与えることを目的とする．

## ３．研究の方法

集合を幾何学的に捉えるためには，その集合に「形」を与えなくてはならない．「研究の目的」欄でも述べたとおり，離散集合に「形」を与える方法の中で，これまでにもっとも成功しているのは，「連続的なもので近似する」ことである． それにより，本来の離散集合に与えられていない情報が付与され，幾何学的な対象として扱うことが可能になる．しかしながら，これは石鹸膜や Lie 群の格子など，離散集合を近似する連続的な対象が容易に見つかる場合に限られる．逆に，滑らかな曲面等が与えられたときに，その曲面をコンピュータグラフィックスで表現すること等を目標として，「曲面を離散集合で近似する」研究も盛んに行われている．本研究は，これらの研究とは異なり離散集合そのものを直接に幾何学の対象として捉えることを目的に，離散集合に豊かな幾何構造を構築することを目指す．

これまでの離散幾何学の研究でよく行われていたのは，その集合にウェイト付きのグラフの構造を与えることであった．このウェイトは離散集合の中の 2 点の組に対して，それらの位置関係の情報を与えるデータとみなすことができる．例えば，離散距離空間としての離散集合は，2 点間の距離がウェイトとして与えられた完全グラフとみなすことができる．ここで与えられているのは，離散集合のいわば１次元的な構造である．本研究では，離散集合にある意味で「高次元的な」構造を与え，離散集合の「形」を捉えることを試みる．また，この構造が妥当であるかどうかは，「有限群の形」が正しく捉えられているかどうかにより検証する．

## ４．研究成果

本研究において，最初に取り組んだのは，離散集合に「１次元的な構造」が与えられたときに，その構造が与える形をどのように捉えるか，という問題である．この問題を足がかりに「高次元的な構造」を見出すつもりであった．残念ながら「高次元の構造」を満足のいく形で与えることはできなかったが，以下で，この研究の経過と成果，および今後の展望について述べる．

(1) 離散集合の形を捉える一つの方法は，その離散集合を良い距離空間への良い埋め込みにより部分距離空間として実現することである． 埋め込みの良し悪しは，離散集合に与えられた「１次元的な構造」をより良く実現しているかどうかにより判定される．ここでいう「１次元的な構造」とは，2 つの点の組に対するウェイトを意味する．このとき，この集合の距離空間への埋め込みに対して，このウェイトを用いて Rayleigh 商と呼ばれる 0 以上 2 以下の値が定まる.この値（の 1/2 とのずれ）は，「非線形スペクトルギャップ」と呼ばれることもあり，後述す

るように，ある設定の下では有限表示群の固定点性質と密接に関係している．埋め込みの良し悪しは，種々の距離空間に対するこの値を比較することで判定される．多くの場合，この値が小さい埋め込みが良い埋め込みとみなされる．より正確には以下のように述べられる．
研究代表者は，本研究に先立つ納谷信氏（名古屋大学大学院多元数理科学研究科・教授）との共同研究で，非正曲率距離空間 Y の局所不変量 $\delta(Y)$ を導入していた．この不変量は，大雑把に言うと，Y の有限個の点配置をどれだけ重心をずらさずに Hilbert 空間に実現できるかを測る量である．離散距離空間が Y に埋め込まれたとき，その埋め込みの非線形スペクトルギャップは，その離散距離空間の Hilbert 空間への埋め込みに関するスペクトルギャップと $\delta(Y)$ を用いて評価できる．その評価は，Y と Hilbert 空間との差によって，Y への埋め込みと Hilbert 空間への埋め込みのスペクトルギャップの差を評価する，ある意味で（埋め込まれる離散距離空間にはよらない）普遍的な評価である．この評価の応用として，納谷信氏（名古屋大学大学院多元数理科学研究科・教授と近藤剛史氏（鹿児島大学理学部・准教授）との共同研究で，ある種のランダム群の固定点定理を得ている．
しかしながら，一般にはこの評価は精密なものではなく，埋め込まれている離散距離空間と Y の「相性が良い」場合には，Y への埋め込みのスペクトルギャップが，$\delta(Y)$ を用いた評価と大きな差をもってしまうことがある．このことに注目し，本研究を進める上で，$\delta(Y)$によるスペクトルギャップの評価と実際のスペクトルギャップの値との差が大きいときに，その埋め込みは良い埋め込みになっていると考え，この差が何に起因するかを問題にした．１次元的な構造から決まる Rayleigh 商からは読み取りきれない要因からこの差が生じると考えられるので，これこそが離散距離空間の「高次元的な構造」と関係しているはずだが，残念ながらこのような直感的な捉え方を超えて数学的な定式化を与えるには至らなかった．

(2) 本研究のウェイト付きの有限集合の埋め込み問題に関する成果およびその応用として，プレイン・ワード・モデルのランダム群の非正曲率距離空間に対する固定点性質を示すことができた．この結果について，以下に詳述する．
群 G の距離空間 Y への等長的作用が常に固定点をもつとき，G は Y に対する固定点性質をもつ，という．G が有限群で Y が非正曲率距離空間であるとき，G は常に Y に対する固定点性質をもつことが知られている．したがって，問題になるのは無限群であって Y に対する固定点性質をもつ群の例あるいは存在である．非正曲率距離空間 Y に対して固定点性質をもつ群の例は，ある時期まで階数の高い非コンパクト Lie 群の格子程度しか知られていなかったが，離散距離空間の幾何学の進展と「ランダム群」の概念の導入により，非正曲率距離空間に対する固定点性質をもつ群が，実は非常にたくさん存在することがわかってきている．本研究の成果もそのような結果の一つへの応用をもつ．m 個の文字の集合 S を考え，S の元 s に対し，$s^{-1}$をsの逆元と呼ぶ．S に属する文字とその逆元からなる文字列を語と呼ぶ．語を構成する文字の個数（重複を込めて数える）を語の長さと呼ぶ．集合 S と語の集合 R の組 P=(S,R)を与えると S の生成する自由群を R を含む最小の正規部分群で割って得られる群 G(P)が定まる．この S と R の組(S,R)を群の表示と呼ぶ．R が長さ n の語だけからなり，$1<C$, $0<d<1$ に対し，R の元の個数が $C^{-1}(2m)^{dl}$ 以上，$C(2m)^{dl}$ であるような群の表示 P=(S,R)の集合を P(m,n,d) で表す．d が 0 に近いとき，P(m,n,d)に属する表示 P=(S,R)の R は小さい集合で，R を含む最小の正規部分群は小さくなり，したがってこの群で自由群を割って得られる G(P) は大きくなることが期待される．逆に d が 1 に近いときには，R が大きくなり G(P) が小さくなることが期待される．実際，Ollivier により，P(m,n,d) の元 P から定まる群 G(P) は，d が $1/2 - \log_{2m}(8m-4)$ より大きいときには，n が無限大に近づくとき 1 に近づく確率で有限群となり，d が $1/2 -\log_{2m}(8m-4)$ より小さいときには，やはり n が無限大に近づくときに 1 に近づく確率で無限群かつ Gromov の意味での双曲群となることを示している．
同様にして， d の大きさが距離空間への等長的作用の存在への制約を与えることも期待される．例えば，P(m,n,d)の元 P=(S,R)の距離空間 Y への作用を考えると，R が小さいときには作用を作り易く，R が大きいときには作用が作りにくいということが容易に想像される．したがって，R が大きいときの方が，Y への作用に対する制限が強く，Y に対する固定点性質をもち易いことが予想される．一般には必ずしもこの予想は正しくないが（上の Ollivier の結果と似たような意味で）非常に高い確率で正しいことを次の形で証明することができた：「d を Y に応じて $1/2 - \log_{2m}(8m-4)$ を超えないように大きくとれば，P(m,n,d) の元 P は n を無限大に近づけていくとき指数的に１に近づく高い確率で，Y に対する固定点性質をもつ無限群 G(P) を与える．」この結果を，「P(m,n,d) をモデルとするランダム群は（d を Y に応じて大きくとれば），Y に対する固定点性質をもつ」と読むことがある．（ランダム群と呼ばれる群があるわけではない．）
この結果を示す際に重要な役割を果たすのが，P(m,n,d) の元 P=(S,R) から定まるある有限グラフのラプラシアンの固有値の評価

である．本研究の成果として，この有限グラフのラプラシアンの固有値は d を 1/3 より大きく取れば，上のような意味で「非常に高い確率で 1 に非常に近い」ことが示されている．この結果と上述の δ(Y) と Hilbert 空間に対するスペクトルギャップから非正曲率距離空間 Y のスペクトルギャップを評価する手法を用いて，P(m,n,d) の元が非常に高い確率で Y に対する固定点性質をもつ群 G(P) を与えることが示される．

(3) 最後に，本研究の今後の展望について簡単に述べておく． 離散集合の「高次元的な構造」を見出すことにより離散集合の「形」を捉えるという本研究の最終目標の一つは達成できなかったが，(1) で述べたように，非正曲率距離空間 Y の局所不変量 δ(Y) と Hilbert 空間に対するスペクトルギャップから与えられる Y に対するスペクトルギャップの評価とスペクトルギャップの真の値とのずれに「高次元的な構造」が隠れている，という観察に基づいてさらに研究を続けることには大いに意味があると考えている．このような考察により，非正曲率距離空間 Y に対するスペクトルギャップが正確に捉えられれば，上のランダム群の固定点定理が改善される可能性もある．今後はこの方向での研究を継続していきたい．

## ５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）


① Hiroyasu Izeki, Fixed-point property of random quotients by plain words, Groups Geom. Dyn., 8 (2014) 1101-1140 (査読有).

② 井関裕靖，離散群の剛性と同変写像のエネルギー増大度，Geometry and Analysis, Fukuoka, 2014, 159-163 （査読無）

③ Hiroyasu Izeki, Takefumi Kondo, and Shin Nayatani, N-step energy of maps and fixed-point property of random groups, Groups Geom. Dyn., 6 (2012), 701-736 （査読有）


〔学会発表〕（計１０件）


① 井関 裕靖、離散調和写像のエネルギーの増大度と群作用、名古屋大学剛性セミナー、2014 年 11 月 13 日、名古屋大学大学院多元数理科学研究科（愛知県・名古屋市）

② 井関 裕靖、離散群の剛性と同変写像のエネルギー増大度、福岡大学微分幾何研究会、2014 年 11 月 3 日、福岡大学セミナーハウス（福岡県・福岡市）

③ 井関 裕靖、ランダム群の $L^p$ 空間に対する固定点性質、筑波大学微分幾何学火曜セミナー、2013 年 11 月 19 日、筑波大学（茨城県・つくば市）

④ 井関 裕靖、ランダム群の $L^p$ 空間に対する固定点性質、愛媛大学数学談話会、2013 年２月 20 日、愛媛大学大学院理学研究科（愛媛県・松山市）

⑤ Hiroyasu Izeki, Fixed-point property of random goups, Seminaire Geometrie et Dynamique, 2012 年 9 月 14 日, Lille 市（フランス）


〔図書〕（計　１件）


小林 治、芥川 和雄、井関 裕靖、日本数学会数学メモアール第７巻、山辺の問題、2013、80


〔産業財産権〕

○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## ６．研究組織

(1)研究代表者

井関 裕靖　（IZEKI, Hiroyasu）

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：９０２４４４０９

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：