

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 29 日現在

機関番号：32678

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654017

研究課題名(和文)暗黒エネルギーとエキゾチックR4

研究課題名(英文)Dark energy and exotic R4

研究代表者

橋本 義武 (HASHIMOTO, Yoshitake)

東京都市大学・工学部・教授

研究者番号：20271182

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：暗黒エネルギーおよび宇宙の加速膨張の数理的解析には、非コンパクト空間(有限の大きさではない空間)上のローレンツ幾何、リーマン幾何、非線形楕円型偏微分方程式、特にそれらの無限遠における挙動に関する新しい問題意識、枠組みが必要になる。本研究では、この問題への第一歩として、共形場理論による代数的・複素解析的アプローチを取り、コンパクト・リーマン面のモジュライ空間の無限遠における、共形ブロックと呼ばれるベクトル空間の挙動を詳細に調べ、そのために必要な作用素の代数のスペクトル解析の理論を整備した。

研究成果の概要(英文)：To develop mathematical analysis on the dark energy and accelerating universe, we should study Lorentz geometry, Riemannian geometry, nonlinear elliptic partial differential equations on a noncompact space (space with infinite size), especially the behavior on the ends at infinity, and new framework on those issues. We took an algebraic-complex analytic approach to these problems. We investigated the behavior of the vector spaces called "conformal blocks" at the infinity of moduli spaces of compact Riemann surfaces, and developed the theory of spectral analysis of the operator algebras associated with these.

研究分野：トポロジー

キーワード：ゲージ理論 共形場理論 モジュライ

1. 研究開始当初の背景

(1) 近年の宇宙物理は、全く新しい観測データが爆発的に増加し、今までには想像もつかなかったことが明らかになってきた。中でも宇宙の加速膨脹については、これをわれわれ人類の新しい幾何学的直観として、新しい幾何学の基本的観点を手に入れることが期待される。

(2) 一方で、1980年代に明らかになった、4次元ユークリッド空間の異種微分構造は、いまだその次のステップに進んだ理解に達していない現状にあった。これは、4次元異種微分構造の研究が、コンパクト多様体の場合のゲージ理論、インスタントンのモジュライ空間の幾何学に基づいていて、4次元ユークリッド空間という非コンパクト空間の場合における、インスタントンのモジュライ空間の幾何学を直接扱うものではないことが一因と考えられる。しかし、非コンパクト空間上でインスタントンのモジュライ空間を考える場合の、無限遠における漸近条件をどう取るのが、今考えたいことにとってふさわしいのかに手がかりがなく、また、インスタントン数も無限のものを考える必要があるのかどうかもわからない。そこで、その準備として、非コンパクト空間上のより易しい問題が求められた。

2. 研究の目的

(1) 4次元ユークリッド空間の異種微分構造の理論への新しい刺激として、宇宙の加速膨脹の数理、特に暗黒エネルギーの数理を位置づけ、これを扱う基礎的技法の開発を目指す。まず、加速膨脹する時空の無限遠に幾何学はどうあるべきか。定常的な時空であるならば、無限遠としてコンパクトな空間と時間軸の直積を考えると自然であり、コンパクト空間上の既成の枠組みが使えるが、加速膨脹する時空の場合は、無限遠も時間とともに加速膨脹する上、その重力場の時間発展も非自明であって、特異点はトンネル効果も考慮に入れる必要があるかも知れない。

(2) 一方、4次元ユークリッド空間の異種微分構造の理論に応用された、ヤン・ミルズ理論、非線形楕円型偏微分方程式の理論の非コンパクト空間上における取り扱いに関する新しい枠組みを開発することが大きな目標である。4次元空間自身、インスタントン数1のモジュライ空間の無限遠と見なすことができるので、4次元空間の無限遠は、モジュライ空間の無限遠でもある。モジュライ空間は、何らかの幾何学的対象をパラメトライズするものであり、モジュライ空間の無限遠は、対応する幾何学的対象の退化に対応している。そこで、幾何学的対象の退化を調べることが、モジュライ空間上の無限遠において非線形偏微分方程式を考える際の自然な漸近条件が何になるのかを知る手がかりとなることが期待される。

3. 研究の方法

(1) ソボレフ半ノルムとヘルダー半ノルムの理論を特にスケーリングに対する重みと補間不等式のシステムとして形式化することを試みる。このとき、ヘルダー半ノルムとソボレフ半ノルムはうまくつながって、ソボレフ埋め込み定理が証明される。非コンパクト空間上ではレリッヒの定理が成り立たず、その帰結を見極めることが問題となる。

(2) また、非コンパクト空間の無限遠の制御のモデルケースとして、ある幾何学的対象のモジュライ空間における退化の挙動に着目する。特に、リーマン面の退化に関する共形ブロックの挙動と、それを制御する作用素の代数のスペクトル解析、また、作用素の代数の表現のテンソル積の理論を調べる。

ここで作用素と言ったのは、頂点作用素と呼ばれるものである。頂点作用素は、リーマン面上の点における作用素である。2つの頂点作用素は、対応する2つの点を無限に近づける際、近づく方向に依存して定義される。作用素の積という基本的概念が、点つきリーマン面の退化において定義されるのであり、リーマン面のモジュライ空間の無限遠の挙動に付随して現れるのである。そこで、頂点作用素の代数の構造が、モジュライ空間の無限遠の挙動の解析の問題として、どのように読み取れるかを理解したい、という問題意識に導かれる。

4. 研究成果

(1) 暗黒エネルギーおよび宇宙の加速膨脹の数理的解析には、非コンパクト空間(有限の大きさではない空間)上のローレンツ幾何、リーマン幾何、非線形楕円型偏微分方程式、特にそれらの無限遠における挙動に関する新しい問題意識、枠組みが必要になる。

本研究では、この問題への第一歩として、共形場理論による代数的・複素解析的アプローチを取り、コンパクト・リーマン面のモジュライ空間の無限遠における、共形ブロックと呼ばれるベクトル空間の挙動を詳細に調べ、そのために必要な作用素の代数のスペクトル解析の理論を整備した。これは土屋昭博氏(東大カブリIPMU)との共同研究である。

(2) 頂点作用素代数の作用素をフーリエ級数に展開したときの係数に現れる作用素たちのなす代数を考える。この代数は自然なフィルトレーション構造をもつ。この代数の表現であるベクトル空間としても、自然なフィルトレーション構造をもつものを考える。この代数の生成元は自然に与えられるが、問題は関係式である。関係式は無限の項をもっている。自然なフィルトレーション構造に関する有限性をもつ表現に限定した場合にのみ、この関係式は有限項になる。

(3) 代数にとってもっとも基本的な表現は、正則表現、すなわちその代数自身を代数の表現であるベクトル空間と見なしたもののだが、これは、自然なフィルトレーション構造に関

する有限性をもたない．そこで，正則表現の代わりに，自然なフィルトレーション構造の定める位相に関して稠密な，有限性をもつ表現が必要になる．それが正則双加群と呼ばれるものであるが，本研究において，正則双加群の，より自然な，適用範囲がより広い定式化に成功した．この代数は，ヴィラソロ代数のハミルトニアンに由来するハミルトニアン作用素をもつ．正則双加群への左右からのハミルトニアンの作用により，2変数多項式環の正則双加群上の表現が得られるが，実は任意のベクトルが有限次元表現に含まれる．すなわち，正則双加群においてヒルベルト・スキームやヤング図形が自然に内在していることがわかる．ヒルベルト・スキームは，インスタントンのモジュライ空間の無限遠の挙動を統制する対象である．

(4) 頂点作用素は，リーマン面上の点に付随しており， n 点関数は，リーマン面上の n 個の点の位置の関数になる． n 点関数を自然に誘導するものが共形ブロックというベクトル空間である．これは，点つきリーマン面のモジュライ空間上のベクトル束であって，平坦な接続をもつものである．したがって，このベクトル空間は，ある意味でリーマン面の複素構造には依存せず，位相的に定まっているものだと言える．リーマン面が退化する際，共形ブロックがどのように振る舞うかが問題である．退化したリーマン面，すなわち安定代数曲線に対する共形ブロックとして，新たに生じた二重点に正則双加群を置いたものを考える．種数0の代数曲線の場合，大域的な座標を取ることができるので，退化のようすをあらかじめ書き下すことができる．中山の補題を用いて，モジュライ空間の無限遠における共形ブロックの挙動が，二重点に正則双加群を置いた場合の安定代数曲線に対する共形ブロックをモデルとして記述できることがわかる．これを因子化と言う．

(5) 一般の種数のリーマン面に対しても，座標系に依存しない，層を用いた定式化を遂行することが可能になる．共形ブロック上の接続の構成も，この定式化の下で，座標系に依存しないものとして行うことができる．ヴィラソロ代数の中心拡大の問題，リーマン面の点における局所座標系の1次の項の固定の問題，およびそれが安定代数曲線の二重点においてどのように扱われるべきかという問題， n 点関数が定義される空間の自然な構成の問題，など，一般の種数のリーマン面に対する共形ブロックの構成に際しては，基本的な問題があるが，いずれも満足の行く形で理論を定式化することができた．その際，Knudsenによる安定代数曲線の関手的な理論が応用される．理論が関手的であるおかげで，特定の局所モデルにおける細かい計算が，点つき安定代数曲線のモジュライ空間の塔の上の共形ブロックの大域的理論に延長できる．

(6) 正則双加群は，因子化において現れるが，因子化は，頂点作用素代数の表現のテンソル

積の構成においても現れる．正則双加群への片方への代数の作用を考え，これをリーマン面上の点の一つにおいて，別の点に頂点作用素代数の表現をおく．そして共形ブロックやその双対である余不変式空間を考えると，正則双加群へのもう一つの代数の作用により，共形ブロックや余不変式空間に，頂点作用素代数の表現の構造が入る．この手続きにより，リーマン面上に指定された点の上に置いた頂点作用素代数の表現たちのテンソルが得られる．これをフュージョン・テンソル積とよぶ．これがモノイダル圏をなすことは，因子化の議論を通して得られる．

(7) また，正則双加群を2点に置いた共形ブロックを考えると，頂点作用素代数の表現から，作用素の代数の双加群が得られる．これを加群/双加群対応とよぶ．2つの双加群に対して，そのテンソル積が自然に定義される．このとき，加群/双加群対応が，フュージョン・テンソル積を双加群のテンソルに移すことが，やはり因子化によって確かめられる．

(8) 頂点作用素代数の表現論は，表現のなすアーベル圏が半単純になる場合には土屋・上野・山田による因子化の理論があった．これを表現のなすアーベル圏が半単純でない場合に拡張することが問題である．具体的には，対数共形場理論の W 代数の表現論が基本的な例を与えている．表現のテンソル積の理論が整備されることにより，表現のなすアーベル圏が半単純でない場合の解析が進み，対応する量子群の表現論へと，研究が現在進展中である．

5. 主な発表論文等

(研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計0件)

[学会発表](計8件)

Yoshitake Hashimoto: Conformal field theory on stable curves, OCAMI International Workshop, Mathematics and Physics in General Relativity, (2015.3.16). 大阪市立大学(大阪府)

Yoshitake Hashimoto: "Conformal field theory for C_2 -cofinite VOAs and fusion tensor products" RIMS symposium "String theory, integrable systems and representation theory(招待講演). (2013.8.1). 京大数理研(京都府)

橋本義武: "頂点代数に対する共形場理論におけるリーマン面の退化" 研究集会「代数多様体のトポロジーとその周辺」(招待講演). (2013.8.23). 北大理学部(北海道)

橋本義武: "E6型射影不変量と Mathieu 群 M_{24} " 研究集会「多様体と幾何構造の融合」(招待講演). (2013.3.5) 名城大学(愛知県)

橋本義武: "Geometric Satake corres-

研究者番号：

pondence and fusion tensor product" 香川
セミナー(招待講演)。(2012.12.8)。香川
大学(香川県)

橋本義武: "Conformal field theory for
C2-cofinite vertex algebras" トポロジー
火曜セミナー(招待講演)。(2012.12.4)。
東京大学(東京都)

橋本義武: "物理にリー群が現れるのはなぜ
か" KEK サマーチャレンジ(招待講演)。(2012.
8.23)。KEK(茨城県)

橋本義武: "Rosenfeld projective plane を
めぐって" OCU48 セミナー(招待講演)。
(2012.7.21)。大阪市立大学(大阪府)

〔図書〕(計2件)

(1) 橋本義武, サイエンス社, ゲージ理
論の基礎数理, 2015, 204

(2) 橋本義武, 放送大学教育振興会, 非
ユークリッド幾何と時空, 2015, 173

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

橋本 義武 (HASHIMOTO Yoshitake)

東京都市大学・知識工学部・教授

研究者番号：20271182

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()