様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２６年　６月　６日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2013
課題番号：２４６５４０２０
研究課題名（和文）幾何学的測度論と双曲型作用素・数値計算の融合

研究課題名（英文）Geometric measure theory and hyperbolic operators ant its numerical calculations

研究代表者
小俣　正朗（Omata, Seiro）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：２０２１４２２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,800,000円、（間接経費）　840,000円

研究成果の概要（和文）：　非線形偏微分方程式・変分問題で、幾何学的測度論に関連する問題が重要な研究対象となってきた。この問題は変分問題を出発点として、放物型などへも拡張されてきた。しかしながら、正則性の問題などから、双曲型への拡張はあまり行われてこなかった。
　本研究では幾何学的測度論と双曲型との融合をメインテーマとし、特に自由境界問題についての研究を行ってきた。物理的イメージとして、液滴の付着問題、弾性体ボールの衝突問題などにあたり、数学的手法と共に数値解析法の開発も行ってきた。
現在、表面張力に駆動される液滴の運動を粒子法で再現したり、マルチフェイズ（多数の重なり合う泡構造）の問題についても数値結果を得た。

研究成果の概要（英文）：In this research work, hyperbolic free boundary problems have been treated. The basic equation expresses a model for peeling off a tape from a plane. Based on this model, we established a new method analyzing bubble motion on water surface or small droplet motion with dynamic contact angle on obstacle. In the case of everal attached bubbles, we developed an efficient algorithm which can automatically deal with moving junctions including topological changes. On the ther hand, we have constructed a numerical solver for the problem of bouncing elastic shell via the discrete Morse flow method. Using this algorithm, we are able to incorporate inner structure and analyze the interaction
between the shell and its contents.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：双曲型自由境界問題　変分問題　数値解析　離散勾配流

１．研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式・変分問題で、余次元が存在する幾何学的測度論に関連する問題が重要な研究対象となってきた。この問題は変分問題を出発点として、放物型などへも拡張されてきた。しかしながら、正則性の問題などから、双曲型への拡張はあまり行われてこなかった。
しかしながら、水面上の泡の挙動やなのドロップレットの挙動制御など工学的にも数学的にもおもしろい問題群が現れてきた。液的などは表面張力で振動しあたかも波動型方程式の支配運動に従うように振る舞う上に、その体積を保存するという特徴を持つ。このような大域的制約条件のついた問題を扱うのは大変困難であった。また、ドロップレットには付着する面との接触角があり、この時間依存の表現も出来ていなかった。
このような状況下で我々は離散勾配流を導入して双曲型作用素をもつ問題を変分の最小化問題へと近似して説く方法論を着想した。
また、水面の泡のように重なりがある泡構造を想定する場合、取り扱いはさらに困難となる。泡同士が重なるジャンクションポイントの自動的な取り扱いが困難を極めるからである。これに対して、ジャンクション付きの平均曲率流の概念を導入するという着想を得た。これも変分に基づく方法論となると想定されていた。このように、困難な問題たちとそれを解決するアルゴリズムが見いだされる状態が当時の背景であった。

２．研究の目的

幾何学的測度論と双曲型との融合をメインテーマとする。具体的な問題としては自由境界問題を想定した。近似弱解の構成から始め、解の存在証明、正則性が期待される場合の解の評価などを得ることを目指す。物理的イメージとして、液滴の付着問題、弾性体ボールの衝突問題などを想定している。数学的手法と共に数値解析法の開発にも取り組み応用まで含んだ総合的な解析方法の開発をめざす。さらに、薄膜と流体の連成解析への端緒も開くことを目指した。

３．研究の方法

ラグランジェアンから変分問題（離散勾配流）を用いて新たな近似解の構成方法などを考える。これは自由境界・体積保存問題など方程式では取り扱いにくい問題群に対して有効な方法論となりうる。離散解（時間差分）の真の解への収束可能性については様々なエネルギー評価が問題となる。最初は、自由境界を与える測度の項についてスムーシングを行い解の存在を示したい。（スムーシングをしたあとでも自由境界は存在する。）さらに、正則性の確保のためダンプ項をつけて連続性を持った解の存在を示し、そこから真の解へのアプローチを行う。また、これらの解析方法に基づいた数値計算方法も開発し、解の妥当性について考察を行うと共に、計算ライブラリの整備を行う。さらに連成解析ソフトウェアの開発も行う。基盤となる、剥離現象は、机に貼り付けたセロテープをはがす問題と同等と考えることが出来る。定常自由境界問題の汎関数は、はがれる仕事部分に特性関数χ{u>0}を含む。
すなわち、非凸（不連続）なエネルギーが現れ、この Action functional の第一変分は特性関数の不連続性により計算できない。しかしながら、停留点を与える関数の正則性などを仮定して、方程式の情報を引き出すことが出来る場合はある。ところが、相互作用などによる本質的な制約条件、例えば、障害物との衝突や、体積保存などの条件が付くと、導出した方程式の局所情報では収まらない。このことより、偏微分方程式以外のアプローチが有用になる場合があることが分かる。そのアプローチのひとつが

Lagrangian　の直接的取り扱う方法である。これと方程式群との連成解析を扱う方法である。この種の方法で接着剤で接着された膜に挟まれた液滴の挙動を見ることが出来る。さらにこれは動的な接触角が自動的にコントロールできるため、平面に付着する液滴の問題について威力を発揮する。しかしながら、液滴表面をスカラー関数のグラフで表す場合、退化作用素（液的表面は平面の下に入れない）やデルタ関数の形式的微分（接触角に関連）など扱い難い項が出現する場合が多い。
さらに、液滴などが空中にある場合、当然表面張力で丸くなろうとする。この力を弾性体の膜で表し、内部に流体を入れる方向（ベクトル値の取り扱い）も行っていきたい。しかしながら、自由境界をもつ弾性体の振動方程式が出現するという難点が生ずる。

４．研究成果

幾何学的測度論と双曲型との融合をメインテーマとし、特に自由境界問題についての研究を行ってきた。物理的イメージとして、液滴の付着問題、弾性体ボールの衝突問題などにあたり、数学的手法と共に数値解析法の開発も行ってきた。液滴にモデルを持つ問題では、マルチフェイズ（多数の重なり合う泡構造）の問題についても結果を得ている。またボールのバウンスについても新たな知見を得た。

離散勾配流は数学で解の存在定理を得るだけでなく、その方法論を生かした計算ライブラリを作ることが出来る。変分の直接法であり、また、近似数値解放そのものになっているからである。そこで、この数値計算情報の共通化を図り、数学の成果だけではなく、他分野とのつながりも確保できるようにした。

この種の問題は、大規模な連立方程式に持ち込むことが大変困難である場合が多い。従って、ベクトル機構などはあまり役にたたないことが想像される。

この段階で取り扱う問題は大規模な高次元の問題となる。例えば次のようなものが考えられる。

(1) 油滴の分裂合体の解析:２次元
(2) 衝突と内部構造:３次元

これらを分散並列計算機を構成し３次元解析を行った。これには並列コンピュータが大変有用であり、計算時間の短縮化に貢献した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

[1] Svadlenka, Karel; Ginder, Elliott; Omata, Seiro; *A variational method for multiphase volume-preserving interface motions*. J. Comput. Appl. Math. 257 (2014), 157-179. doi>10.1016/j.cam.2013.08.027

[2] Nobuyuki Kato, Motoaki Watanabe, Yoshihiko Yamaura, *A Construction Method of Solutions ofParabolic Systems with Local Hoelder Continuity,* Proceedings of the institute of Natural Sciences, Nihon University No.49 (2014) http://www.chs.nihon-u.ac.jp/institute/nature/kiyou/2014/pdf/3_1.pdf

[3] M.Kazama, S.Omata, T.Nagasawa, A.Kikuta, K. Svadlenka *A global model for impact of elastic shells and its numerical implementation*, Adv. Math. Sci. Appl., 23, 193-108 (2013). http://mcm-www.jwu.ac.jp/~aikit/AMSA/vol23.html

[4] 風間正喜、諏訪多聞、小俣正朗、小原功任 粒子法による液的の数値計算、計算工学講演会論文集１７(2012) D-10-3.(CD-ROMのみ)

〔学会発表〕（計４　件）

[1] S.Omata, *Mathematical modeling and numerical treatment of adhesion, exfoliation and collision*, The 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equation, 北海道大学、札幌、2014年2月22日-23日

[2] 小俣正朗　「粘着と剥離の数理モデルについて」、数学協働プログラム主催ワークショップ「表面微細構造の学理の探求：低環境負荷材料の創造に向けて」、北海道大学、札幌、2013年8月21日～8月23日

[3] S.Omata, *Mathematical modeling and numerical treatment of adhesion, exfoliation and collision*, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences, Kyoto, Japan, 2012年11月５日-９日(Invited Plenary talk)

[4] S.Omata, *Mathematical and computational aspects of problems involving adhesion, detachment, and collision*, 9th AIMS international conference on Dynamical system, Differential eqations and Application, Orlando, Florida.2012年7月1日～5日

〔図書〕（計0件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計0件）
○取得状況（計0件）

〔その他〕
ホームページ等
なし

６．研究組織

（１）研究代表者
小俣 正朗（OMATA Seiro）
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号：20214223

（２）研究分担者
山浦 義彦（YAMAURA Yoshihiko）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：90255597