

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 5 月 22 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654024

研究課題名(和文) 拡散過程モデルのサンプリング問題とその応用

研究課題名(英文) Sampling problems for diffusion processes and their applications

研究代表者

内田 雅之(Uchida, Masayuki)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：70280526

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：確率微分方程式で定義される拡散型確率過程モデルの適応的推定、適応的検定、適応的モデル選択問題、非線形判別分析等の研究を行った。本研究における離散観測は、高頻度で長期間観測データだけでなく、刻み幅とデータ数における一般のバランス条件の下での中頻度データも対象とした。エルゴード的拡散過程モデルのパラメトリック推測には、ドリフトとボラティリティを同時に推測する方法と、収束率の速いボラティリティを推測した後ドリフト推測を行う適応的推測があり、数値実験において、同時推測よりも適応的推測による統計量の方が安定していることが確認された。

研究成果の概要(英文)：We consider the adaptive estimation, adaptive test statistics, adaptive model selection problem and non-linear discriminant analysis of diffusion type processes defined by stochastic differential equations. The discrete observations we treat are not only high frequency data but middle frequency data which satisfy a general condition of the sample size and the discretization step. For parametric inference of diffusion type processes, there are two kinds of statistical methods. One is the simultaneous inference of drift and volatility parameters. The other is adaptive inference, which means that we estimate volatility parameter first and then estimate drift parameter since the convergence rate of the volatility estimator is faster than that of the drift estimator. The simulation studies show that the performance of the adaptive statistics is stable compared with the simultaneous statistics.

研究分野：確率過程の統計推測

キーワード：統計数学 確率微分方程式

## 1. 研究開始当初の背景

離散観測に基づく拡散型確率過程モデルの統計推測は、確率解析学と統計解析学が融合し、数理ファイナンスや金融工学へのフィードバックが期待される非常に重要な研究課題である。観測されるデータは、人口データのような観測幅がそれほど小さくない低頻度データや、金融データのような分・秒刻みで観測される高頻度データがある。現在までに、低頻度データおよび高頻度データに基づく統計解析理論の研究は活発になされている。一方、統計データの中には、低頻度でもなく高頻度でもない中頻度データとよばれるデータが存在するが、それに対する統計理論はあまり整備されていない。

## 2. 研究の目的

(1) 確率微分方程式によって定義された拡散過程モデルにおける中頻度データ解析を実現可能にする新たな枠組みの統計推測法の開発およびその数学的正当化を行う。以後、データ数を  $n$ 、刻み幅を  $h$  とする。先行研究から、エルゴード的統計 ( $n \times h$  ) において、バランス条件 ( $n \times (h$  の  $p$  乗)  $> 0$ ,  $p$  は 2 以上の整数) が重要な役割を果たすことが知られている。毎秒データや毎分データのような高頻度データだけでなく、5 分間隔程度の中頻度データ ( $n \times (h$  の  $p$  乗)  $> 0$ ,  $p$  は 3 以上の整数) に対しても、理論的に好ましい性質をもち、数値計算上もうまく機能する統計的推測手法の開発は、単に理論統計学としてだけでなく、実際にデータ解析を行う際に必要不可欠である。本研究では、中頻度データに基づいて、ドリフトパラメータと拡散係数 (ボラティリティ) パラメータを推測するための有効な統計的手法の開発およびその数学的正当化を行う。

(2) 中頻度データに基づく拡散過程のベイズ推定量の構成及びその漸近的性質の解明について研究を行う。また、中頻度データに基づく拡散過程の統計推測手法を確率微分方程式の仮説検定問題や非線形判別問題に応用する。

(3) 中頻度データに基づく拡散過程モデルの適応的最尤型推定法、適応的ベイズ型推定法、情報量規準に基づくモデル選択問題など、基礎的な統計推測法の研究を行う。また、先行研究で得られた理論的正当性 (漸近的性質) を保持しながら、計算効率も向上できる統計推測法の開発を行い、実データを用いた実証分析を行う。

## 3. 研究の方法

(1) 拡散過程から得られる中頻度データや高頻度データを用いて、ドリフトパラメータ

と拡散係数パラメータの最小コントラスト型 2 段階推測法を提案し、それから得られる統計量の漸近的性質の証明を行う。また、大規模な計算機実験を行い、統計量の漸近パフォーマンスを考察する。

(2) 先行研究で示された、データ数  $n$  と刻み幅  $h$  に対するバランス条件 ( $n \times (h$  の 3 乗)  $> 0$ ) の下で機能する推定量を、オイラー・丸山近似に基づく擬似尤度関数にプラグインすることによって非線形判別関数を構成する。この判別関数を用いた判別ルールは、ドリフト項や拡散係数項の状況に依存せずに、極めて精度よく機能しているので、その非線形判別関数の漸近分布について解明する。また、最小コントラスト型 2 段階推定量を用いた統計的仮説検定法の開発やモデル選択問題にも取り組む。さらに、実際の中頻度の金融データを用いて、ベイズ推測を用いた中頻度データ解析および実証分析を行う。

(3) ドリフトパラメータと拡散係数パラメータを推定するために、最尤型推定法とベイズ型推定法について研究するが、どちらも漸近理論においては同等であることが予想される。しかしながら、数値計算の観点から、最尤型推定法とベイズ型推定法のどちらのパフォーマンスがよいのか、または両方とも用いるハイブリッド型推定法がよいのか等を検証することは中頻度データ解析を行う上で、非常に重要な問題である。大規模シミュレーションを通じて、各種統計量の漸近パフォーマンスの検証を行う。

## 4. 研究成果

(1) 確率微分方程式によって定義されるエルゴード的拡散過程から得られる離散観測データに基づいて、ドリフトパラメータと拡散係数パラメータを推定する問題について研究を行った。これは拡散過程モデルのサンプリング問題とよばれる確率過程の統計における主要な研究分野の一つである。本研究では、中頻度データに基づいたドリフトパラメータと拡散係数パラメータの最小コントラスト型 2 段階推測法を提案し、その漸近的性質の考察を行った。また、非線形拡散過程モデルに対して、中頻度データ ( $h=5/390$ ,  $nh=250$ ) から得られる推定量の漸近的パフォーマンスを計算機シミュレーションにより検証し、提案された推定量が緩いバランス条件の下で、既存の推定量よりも良いパフォーマンスを示し、安定していることが確認できた。

(2) 拡散過程から得られる離散観測 (データ数  $n$ 、刻み幅  $h$ ) を用いた、ドリフトパラメータや拡散係数パラメータなどの未知パラメータの推定や検定は基礎的な統計推測問題であり、それらは必然的にモデル選択や非

線形判別分析へと応用される。先行研究によって、一般のバランス条件 ( $n \times (h \text{ の } p \text{ 乗})$   $0, p$  は 2 以上の整数) の下での、最小コントラスト型推定量の構成およびその漸近的性質が解明されたので、それを検定問題に応用した。さらに、拡散過程モデルの非線形判別分析の研究を行った。具体的には、2 つの異なる拡散過程モデルがあり、そのいずれかから離散観測されており、そのデータに基づいて、拡散過程モデルを判別する問題を取り扱った。離散観測は、 $nh$  ,  $h > 0$  , バランス条件  $n \times (h \text{ の } 3 \text{ 乗}) > 0$  の中頻度データを仮定した。2 つの拡散過程モデルが異なるのは、拡散係数が異なる場合と、拡散係数は同じであるがドリフトが異なる場合の 2 種類が考えられるが、統一された非線形判別関数を構成して、それがどちらの場合でも一致性を有することを示した。また、観測区間が固定された非エルゴード的拡散過程モデルに対して、拡散係数に対する判別分析を行い、一致性をもつ非線形判別関数を構成した。

(3) 一般のバランス条件 ( $n \times (h \text{ の } p \text{ 乗})$   $0, p$  は 2 以上の整数) の下での、離散観測に基づくエルゴード的拡散過程モデルの適応的ベイズ型推定や適応的検定問題、適応的モデル選択問題等の研究に取り組んだ。ドリフトパラメータとボラティリティパラメータの同時ベイズ型推定に比べて、収束率の速いボラティリティを推定した後にドリフト推定を行う適応的ベイズ型推定は、安定した推定値を返すことが数値実験で確認された。適応的推定法には、大きく分けて、適応的最尤型推定法と適応的ベイズ型推定法があり、適応的最尤型推定法は最適化する際に初期値の選定が難しく、適応的ベイズ型推定法は計算時間がかかるという問題がある。その点を回避するために、擬似尤度関数に基づいてニュートン・ラプソン法と適応的推定法を複数回適用した、マルチ・ステップ推定量を提案して、その漸近的性質を示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

Uchida, M. and Yoshida, N. (2012). Adaptive estimation of an ergodic diffusion process based on sampled data. *Stochastic Processes and their Applications*, 122, no. 8, 2885-2924.  
(DOI: 10.1016/j.spa.2012.04.001)

Uchida, M. and Yoshida, N. (2013). Quasi likelihood analysis of volatility and nondegeneracy of statistical random field. *Stochastic Processes and their Applications*, 123, no. 7, 2851-2876.

(DOI: 10.1016/j.spa.2013.04.008)

内田雅之 (2013). 確率微分方程式の統計的モデリング 日本統計学会誌. 第 43 巻, 第 2 号, 335-358.

Kitagawa, H. and Uchida, M. (2014). Adaptive test statistics for ergodic diffusion processes sampled at discrete times. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 150, 84-110.  
(DOI: 10.1016/j.jspi.2014.03.003)

Uchida, M. and Yoshida, N. (2014). Adaptive Bayes type estimators of ergodic diffusion processes from discrete observations. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 17, 181-219.  
(DOI: 10.1007/s11203-014-9095-4)

Fujii, T. and Uchida, M. (2014). AIC type statistics for discretely observed ergodic diffusion processes. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 17, 267-282.  
(DOI: 10.1007/s11203-014-9101-x)

Kamatani, K. and Uchida, M. Hybrid multi-step estimators for stochastic differential equations based on sampled data. To appear in *Statistical Inference for Stochastic Processes*.  
(DOI 10.1007/s11203-014-9107-4)

[学会発表](計 12 件)

内田雅之, Discriminant analysis for discretely observed ergodic diffusion processes, *Asymptotical Statistics of Stochastic Processes IX*, 2013 年 3 月 13 日, Laboratoire Manceau de Mathematiques, Universite du Maine, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, Cedex 9, France.

内田雅之, 金融データに基づく統計的 SDE モデリング, *ASC2013 Asymptotic Statistics and Computations*, 2013 年 3 月 27 日, 東京大学大学院数理科学研究科(駒場キャンパス)

内田雅之, Discriminant analysis for discretely observed stochastic differential equations, *DYNSTOCH Meeting 2013*, 2013 年 4 月 18 日, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Copenhagen, 17-19 April 2013.

内田雅之, Asymptotic properties of discriminant functions for stochastic differential equations from discrete observations, *The 29th European Meeting of*

Statisticians (EMS), 2013年7月22日, The Congress Center of Eötvös Lorénd University, Faculty of Sciences (ELTE), Budapest, Hungary.

内田雅之, Discriminant analysis for stochastic differential equations based on sampled data (Invited talk), The 59th World Statistics Congress (WSC), 2013年8月29日, The Hong Kong Convention and Exhibition Centre (HKCEC), Hong Kong.

内田雅之, 確率微分方程式の統計的モデリング(企画セッション講演), 2013年度統計関連学会連合大会, 2013年9月9日, 大阪大学豊中キャンパス.

内田雅之, 拡散過程モデルにおける適応型計算統計(企画セッション講演), 2013年度統計関連学会連合大会, 2013年9月10日, 大阪大学豊中キャンパス.

内田雅之, Adaptive Bayes type estimation for stochastic differential equations based on high-frequency data, CFE 2013 and ERCIM 2013, 2013年12月14日, The Senate House, University of London, UK.

内田雅之, Hybrid multi-step estimators for diffusion processes, The 3rd IMS-APRM, 2014年7月3日, Howard International House, Taiwan.

内田雅之, Hybrid multi-step estimators for stochastic differential equations from discrete observations, DYNSTOCH Meeting 2014, 2014年9月11日, Centre for Research in Statistical Methodology (CRiSM), University of Warwick, Coventry, UK.

内田雅之, 拡散過程の適応的推測法と高頻度データ解析への応用(企画セッション講演), 第9回日本統計学会春季集会, 2015年3月8日, 明治大学中野キャンパス.

内田雅之, Hybrid multi-step estimation of the volatility for stochastic regression models, Asymptotical Statistics of Stochastic Processes X, 2015年3月20日, Laboratoire Manceau de Mathématiques, Université du Maine, Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, Cedex 9, France.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

内田雅之 (UCHIDA MASAYUKI)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授  
研究者番号: 21540126