様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：６２６０３
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2015
課題番号：２４６５４０３０

研究課題名（和文）無限次元最適化における離散と連続

研究課題名（英文）Discreteness and Continuity in Infinite-dimensional Optimization

研究代表者
伊藤　聡（Ito, Satoshi）

統計数理研究所・数理・推論研究系・教授

研究者番号：５０２３２４４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：すべての最適化問題は測度に関する最適化問題である．とは言い過ぎであるとしても，無限次元の最適化問題は，ほとんどの場合，適当な測度の空間における最適化問題であるとみなすことができる．一般に測度はルベーグ測度に関して絶対連続な成分と離散的な成分に分解することができるが，測度空間上の最適化において，その解が離散測度となることが少なくない．本研究は，どのような状況のもとで最適解が離散測度もしくは絶対連続測度になるのかを明らかにする試みである。

研究成果の概要（英文）：Most, if not all, optimization problems in infinite dimension can be regarded as those of some measure. A measure generally has an absolutely continuous component and a discrete component with respect to the Lebesgue measure. We often observe that many optimization problems in measure spaces have a discrete optimal solution. A question then arises: in what conditions does a solution to a given class of optimization problem become discrete or absolutely continuous? The purpose of this research is to give an answer to such a question.

研究分野：数理最適化

キーワード：凸最適化　測度空間　確率測度　無限計画　半無限計画　モーメント問題　通信路容量　相互情報量

１．研究開始当初の背景

最適化手法の一つである切除平面法の理論を展開する上での最良のプラットフォームとして，測度空間上の最適化問題を考えた際，解が離散測度になることが予想外に多いという印象を，数値実験を通して持っていたが，その後同僚から情報理論における通信路容量の問題を紹介され，ここでも同様の現象が多く観測されていることを知った。

一方，最適化法の中に半無限計画法というものがある。半無限計画問題とは，決定変数が有限次元で制約条件が（可算・非可算を問わず）無限個あるものを通常指すが，その双対問題は逆に決定変数が測度すなわち無限次元で制約条件は有限個となる。半無限計画の理論によると，双対問題の最適解としての測度（双対変数）が離散的であることが示されるが，上述の通信路容量問題はいかなる意味においても半無限計画問題そのものとみなすことはできない。

このような状況のもとで，申請者は，半無限でなく「全無限」の問題であっても，ある特定の状況にあるときは，半無限計画に類似した状態になっているのではないかと考え，どのようなときに最適解が離散的になるのかを理論的に明らかにしたいと考えた。

２．研究の目的

無限次元の最適化問題は，ほぼ一般性を失うことなく，適当な測度の空間上の最適化問題とみなすことができる。本研究においては，コンパクトあるいは非コンパクトな空間上の符号つき正則ボレル測度からなるバナッハ空間を考え，この空間において定義される凸最適化問題を考える。前述の通信路容量問題を含む確率測度の最適化問題はその特殊な場合である。

一般に測度は（ルベーグ測度に関して）絶対連続な成分と離散的な成分に分解することができるが，どのような状況のときにこの凸最適化問題の解が離散測度となるのか，また逆にどのような状況のもとで解が絶対連続測度となるのかを考察し，これにより情報理論や制御理論を含む工学の諸分野における無限次元の最適化問題を統一的に眺めることを目的とした。

３．研究の方法

通信路容量の問題は情報理論における基本問題の一つであり，1940 年代の Shannon による先駆的な研究まで遡る。通信路容量とは雑音のある通信路において単位時間に送ることができる情報量の上限であり，具体的には確率測度として表現される入力分布と通信路により定義された相互情報量（カルバック・ライブラー情報量）を適当な制約条件のもとで入力分布について最大化することによって得られる。

特に，AWGN（Additive White Gaussian Noise，加法的白色ガウス雑音）スカラ入出力（一入力一出力）通信路において，2 乗平均パワー制約があるとき，通信路容量を達成する入力分布が正規分布になることを Shannon 自身が示している。一方で，Smith (1971)*は，ピークパワー制約のもとでは，通信路容量を達成する最適な入力分布が離散的になることを示している（しかしながら最適解や通信路容量を解析的に求めたわけではない）。

これを端緒として，制約条件によっては通信路容量を達成する入力分布が有限個の点からなる離散分布となることが次々と報告され，そのような通信路と制約条件の例はその後も増え続けている。このような興味深い現象について，これまで国内では情報理論・統計科学・数理最適化のいずれの分野においても議論されてこなかった。

Smith (1971)* は，複素関数論における一致の定理に基づいた数学的証明を与えている。それゆえ一次元の入出力通信路にしか適用できないが，これがこれまでに知られている唯一の証明であり，これ以降の研究報告はすべてこの 40 年以上前の理論に基づいている。

本研究においては，複素関数論に依らず，純粋に無限次元における数理最適化の立場から，最適解の測度としての性質について考察することにより，新しい理論を構築することを目指した。複素関数論に基づかないため，成功すれば，これまで不可能であった多次元入出力通信路への道筋が開ける。また同時に，通信路容量問題を含む測度空間上の非線形凸最適化問題の解を数値的に求めるアルゴリズムの開発を行った。

４．研究成果

無限次元非線形凸最適化問題はいかなる意味においても半無限計画問題と等価とみなすことはできないが，最適解が離散的になるような場合は，最適解の周辺で局所的に半無限計画問題と等価になる状況になっているのではないかと推測し，この方向で理論の構築を試みた。ピークパワー制約が存在すれば，平均パワー制約など他のモーメント条件の有無に関わらず，通信路容量を達成する入力の確率分布が離散的になることを，複素関数論に依らずに示せたと思っていたが，研究期間の後半になってその論理の一部に誤りが見つかり，半無限計画の理論をはじめとする無限次元最適化の立場から数学的に証明を与えることはかなわなかった。

一方で，最適解を数値的に求めるという立

---

* J.G. Smith, The information capacity of amplitude and variance-constrained scalar Gaussian channels, Information and Control, vol.18, no.3, pp.203–219, 1971

場からすると，通信路容量問題を含む一般化モーメント問題に対する実用的な数値解法として切除平面法が適用できることを確認した。一般に，切除平面法に限らず，反復近似解法である緩和法は，各反復における目的関数値が単調非減少あるいは単調非増加であるなど，単調性を重要な特徴として持っているが，双方向切除平面法は制約条件と決定変数（測度）の双方を緩和するため，必ずしも単調性を持たない。また，双方向切除平面法では各反復において有限次元の緩和問題とその双対を同時に解く必要があり，その意味でこのアルゴリズムを主双対切除平面法と呼ぶことができる。本研究においては，凸 2 次形式を含む測度空間上の微分可能な凸最適化問題に対する拡張を行い，緩い仮定のもとでの最適解への大域的収束性などを示した。通信路容量問題における相互情報量は，適当な修正項を付加することにより，フレッシェの意味で微分可能となる。

以上をまとめると，最適解の性質を理論的に明らかにするという目標は達成できなかったが，通信路容量問題や最適制御問題，一般容量問題や一般化モーメント問題を含む無限次元の凸最適化問題に対して，これらを符号つきボレル測度からなるバナッハ空間上の最適化問題として統一的に捉えること，また双方向切除平面法等のアルゴリズムを用いて数値的に最適解を求めることの有用性は確認できた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）
① 伊藤 聡, 一般化モーメント問題と切除平面法，統計数理研究所学術研究リポジトリ，2016，査読無 (to appear in http://ismrepo.ism.ac.jp/dspace/)
② 伊藤 聡，切除平面法の収束，統計数理研究所学術研究リポジトリ，2014，査読無 http://ismrepo.ism.ac.jp/dspace/bitstream/10787/3582/1/openhouse2014-c14ito.pdf
③ 伊藤 聡，測度空間における凸最適化−無限次元における離散と連続，統計数理，vol.26，no.7，pp.111-122，2013，査読有 http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/61-1-111.pdf
④ 池田思朗，伊藤 聡（共編），最適化技術に基づく統計的推論, 統計数理, vol.26，no.7，pp.1-146，2013 http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/tokeisuri-61j.html http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/61-1-001.pdf
⑤ S. Ito，Convex optimization of probability measure with applications to information theory, Abstracts of the 9th Conference on Optimization: Techniques and Applications, p.96, 2013, 査読無
⑥ 伊藤 聡，測度空間における凸最適化−無限次元における離散と連続, 土谷隆(編)，最適化：モデリングとアルゴリズム 25 (統計数理研究所共同研究リポート 306)，pp.105-114，2013，査読無
⑦ 伊藤 聡，測度空間における凸最適化−無限次元における離散と連続，日本オペレーションズリサーチ学会第 24 回 RAMP シンポジウム論文集，pp.59-68，2012，査読無

〔学会発表〕（計 7 件）
① 伊藤 聡, 一般化モーメント問題と切除平面法，統計数理研究所オープンハウス，2016 年 6 月 17 日，統計数理研究所（東京都立川市）
② 伊藤 聡，測度空間における凸最適化−無限次元における離散と連続（招待講演），共同研究集会「統計多様体の諸分野への応用」，2014 年 11 月 20 日，京都大学数理解析研究所（京都府京都市）
③ 伊藤 聡，切除平面法の収束，統計数理研究所オープンハウス, 2014 年 6 月 13 日，統計数理研究所（東京都立川市）
④ S. Ito，Convex optimization of probability measure with applications to information theory，The 9th Conference on Optimization: Techniques and Applications，2013 年 12 月 14 日，国立台湾科技大学（中華民国台北市）
⑤ 伊藤 聡，測度空間における凸最適化−無限次元における離散と連続，共同研究集会「確率測度の最適化と通信路容量」，2013 年 3 月 22 日，統計数理研究所（東京都立川市）
⑥ S. Ito, Robust optimization（招待講演），Mathematical Modeling for Issues on Ecosystem Services: Theory & Applications，2013 年 3 月 18 日，統計数理研究所（東京都立川市）
⑦ 伊藤 聡，測度空間における凸最適化−無限次元における離散と連続（招待講演），日本オペレーションズリサーチ学会第 24 回 RAMP シンポジウム, 2012 年 9 月 27 日，東北大学（宮城県仙台市）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
なし

６．研究組織

(1)研究代表者

伊藤　聡（ITO, Satoshi）

統計数理研究所・数理・推論研究系・教授

研究者番号：50232442

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし