

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654032

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式の方法による乱流理論の新展開

研究課題名(英文)New development of the theory on turbulence via method of nonlinear partial differential equations

研究代表者

小園 英雄 (Kozono, Hideo)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：00195728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：3次元外部領域において障害物が回転し、回転軸と同じ方向に並進運動している場合、それらが十分小さければ、定常Navier-Stokes方程式は一意的な強解を有することを証明した。特に並進運動のみに限れば、外力が1階偏導関数が自乗可積分なる空間の双対空間に属しているとき、任意の弱解に対してエネルギー等式が成立することを明らかにした。応用は、小さな外力下における弱解の一意性である。一方、内部多重連結領域においては、与えられた境界値がLeray-Fujitaの不等式を満たし、その領域全体へのソレノイダル拡張ベクトル場に定常解がLノルムの位相で十分近いならば、指数的に安定であることを示した。

研究成果の概要(英文)：To the 3D stationary Navier-Stokes equations in exterior domains, if the obstacle rotates slowly around the axis and moves also slowly along the same direction to the axis, then there exists a unique strong solution. In particular, we investigate the case when the obstacle moves with a constant speed and succeed to prove the energy inequality for any weak solution provided the external force is in the dual space of homogeneous Sobolev space with the first derivative in L. As an application, we can show the uniqueness of weak solutions under the smallness assumption on external forces. On the other hand, in the interior domain with multi-connected boundaries, if the inhomogeneous boundary data satisfies the Leray-Fujita inequality and if the stationary weak solution is close to the extended solenoidal vector field in L norm, then it is asymptotically stable with an exponential convergence rate.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：Navier-Stokes 方程式 外部問題の弱解の一意性 領域の位相幾何と可解性 エネルギー不等式 指数安定性

## 1. 研究開始当初の背景

ナビエ・ストークス方程式は非線形特有の現象を引き出すことのできる典型的モデルとして、理論・実験双方から注目されてきた。研究代表者はこれまでに多くの国際シンポジウムを組織した。ミレニアム7問題の1つ「ナビエ・ストークス方程式の時間大域的可解性」は、他の6つの問題と比較して、純粋数学のみならず、計算科学、流体力学とも密接に関係していることが特徴である。

一方、計算科学における直接数値シミュレーション(=DNS)は乱流研究の有力な手段であるが、強い非線形性と巨大自由度をもつという乱流の本質的特長を反映するには困難であった。研究分担者が21世紀COEで推進した一様等方性乱流のDNSは、従来とは桁違いの大型計算であり、初めて大規模実験を凌駕する高いレイノルズ数の乱流データが実験的誤差や不確定性なしに取れるようになった。

## 2. 研究の目的

近年の大型計算機の飛躍的な性能向上に伴い、大気・気象、航空・宇宙、エネルギーなどにおける様々な乱流の解明に計算科学的方法が広く使われつつある。しかし、乱流の問題の根幹にかかわる空間のスケール無限大、粘性消滅、エネルギー減衰といった極限操作に対しては、非線形偏微分方程式の解法における現代解析学的方法が威力を発揮する。実際、調和解析学による非線形偏微分方程式の解の漸近展開の方法は、大規模な有限計算の極限状態を予測可能とし、乱流理論や乱流縮約モデルの構築に寄与することが期待できる。

本研究は、現代解析学の手法を用いて複雑な流動現象の解明、およびその予測信頼性向上に貢献すべく乱流の数学的理論を構築する。

## 3. 研究の方法

本研究は、数学解析学と流体力学の連携によって推進する。数学解析学の研究においては、非線形偏微分方程式の手法、特に調和解析学を用いてナビエ・ストークス方程式および簡素化された方程式の解の性質を、数学的厳密理論および数値実験双方の観点から考察する。領域のサイズの影響やエネルギー減衰といった数値計算では扱えない無限大や極限操作を研究対象とし、大規模な流れを記述する適切なモデルの構築を行うと同時に、乱流の普遍原理に解明に数学的な確証を与える。

流体力学の研究では、主として計算科学的方法、とくに大規模直接数値シミュレーション(Direct Numerical Simulation=DNS)による乱流現象の解明、及び、数理物理学的根拠を持ち恣意的調節パラメータを含まない情報縮約手法の開発に挑戦する。

## 4. 研究成果

## (1) 回転する障害物の周りの定常 Navier-Stokes 方程式の解の存在と一意性

回転する障害物の周りの定常 Navier-Stokes 方程式の解の存在と一意性について研究を行った。より具体的には3次元空間において障害物が回転し、かつ回転軸と同じ方向に並進運動する場合に、その外部領域において非圧縮性粘性流体の Navier-Stokes 方程式の定常解の存在と一意性を考察した。実際、回転の角速度と並進速度、外力を与えられたデータとし、それらが十分小さければ一意的な解が存在することを証明した。ここで、外力は Navier-Stokes 方程式のスケール不変な関数空間である弱  $3/2$ -乗可積分空間であり、構成した解のクラスは一階の偏導関数が同じ関数空間に属するものである。ここで注意すべきことは、一意性については解そのものの小ささを仮定していることである。実際、与えられたデータがスケール不変な関数空間において小さければ、小さな解が存在することは証明できるが、同じデータに対して大きな解が存在する可能性を否定できない。すなわち、たとえ与えられたデータが小さいとしても、解の大きさを制御できるかどうかは未解決である。

一方で、回転運動を伴わない並進運動のみの場合、即ち物体を通り過ぎる流れの場合は、無限遠方の速度が小さくはあるがゼロではないという仮定のもと、小さな外力の場合は、Dirichlet 積分有限な解は一意的に存在する定理を証明した。この定理においては、解の大きさは与えたらデータによってのみ制御可能であり、一意性が必然的に得られる。

## (2) 外部領域における定常 Navier-Stokes 方程式の弱解の一意性とエネルギー不等式の関係

外部領域における定常 Navier-Stokes 方程式の弱解の一意性とエネルギー不等式の関係を考察した。3次元外部領域においては、Lerayにより任意の外力に対して、Dirichlet 積分が有限な範囲でエネルギー不等式を満たす弱解が少なくとも一つ存在することが示されている。しかし、そのような弱解の一意性については、空間における弱3乗可積分ノルムが小さいという仮定が必要であった。またエネルギー不等式の正当性に関しても Dirichlet 積分が有限という範囲では未解決であり、例えば、解の弱3乗可積分ノルムが有限という付加条件の元で保障されるに留まっていた。本研究では、Dirichlet 積分が有限という範囲であってかつ無限遠方に流れがある弱解について新たな知見を得た。実際、エネルギー不等式については、外力が1階偏導関数が自乗可積分という空間の双対空間に属してさえいれば、任意の弱解に対してエネルギー不等式が成立することを証明した。また、一意性については、無限遠方に流れがない場合と異なり、解そのものに対する小ささではなく、与えられたデータの小

ささのみによって制御できることを明らかにした。すなわち、与えられた無限遠方の速度と、1階偏導関数が自乗可積分である空間の双対空間に属する外力の対応するノルムとの双方が十分小さければ、弱解は一意的であることを証明した。この結果は期待できる定常 Navier-Stokes 方程式の弱解の存在と一意性に関しては、最良の結果と言える。

### (3) 外部領域における定常 Navier-Stokes 方程式の解の無限遠方の速度に関する連続性

3次元外部領域における定常 Navier-Stokes 方程式については、無限遠点に小さい速度を与えてエネルギー不等式を満たす弱解が構成できることが得られていた。しかしその弱解の一意的性に関しては、与えられた無限遠点の速度の小ささに加えて解自身の小ささを仮定する必要があった。本研究では弱解の一意的性が無限遠点の速度の大きさを制限することのみによって成立することを示した。更その応用として、任意の弱解が必然的にエネルギー不等式を満たすことに着目し、無限遠点の速度がゼロに収束する場合も含めて、尺度不変な関数空間の汎弱位相、かつ Dirichlet 積分のノルムの強位相においても弱解は無限遠点の速度に関して連続に振る舞うことを示した。

### (4) 一般化された流量条件下における定常 Navier-Stokes 方程式の大きな弱解の安定性

3次元の内部領域における定常解が安定であるための必要十分条件は、その定常解を低階の項にもつ摂動 Stokes 作用素の固有値の実部がすべて正であることが古くから知られている (Sattinger)。

しかし、与えられた境界値や外力の条件によって対応する定常解の安定性を論じた結果は少ない。本研究では、多重連結領域において与えられた境界値が Leray-Fujita の不等式を満たし、不等式を実現する境界値のソレノイダル拡張ベクトル場に定常解が  $L^3$ -ノルムの位相で十分近いならば、安定であることを示した。ここで重要なことは、定常解自身は小さい必要ないことである。応用として2次元の剛体運動、3次元調和ベクトル場の境界への制限によって決まる定常流は、指数漸近安定であることが明らかになった。

### (5) 回転座系における Navier-Stokes 方程式の周期解の存在とその漸近安定性

3次元 Euclid 空間において鉛直方向の座長軸が回転するとき、周期的な外力を与えたならば同じ周期をもつ強解が存在するか？という問題に取り組んだ。実際、周期的な外力が十分小さいならば、同じ周期を持った強解が存在することを証明した。またそのような周期的強解は小さな初期擾乱に対して時間漸近安定であることを示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

① Heck, H., Kim, H., Kozono, H., Weak solutions of the stationary Navier-Stokes equations for a viscous incompressible fluid past an obstacle, *Math. Ann.* 356 (2013), 653-681. 査読有

DOI 10.1007/s00208-012-0861-6

② Kozono, H., Yanagisawa, T., Global compensated compactness theorem for general differential operators of first order, *Arch. Rational Mech. Anal.* 207 (2013), 879-905. 査読有

DOI 10.1007/s00205-012-0583-7

③ Kozono, H., Ushikoshi, E., Hadamard variational formula for the Green's function of the boundary value problem on the Stokes equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 208 (2013), 1005-1055. 査読有

DOI 10.1007/s00205-013-0611-2

④ Kaneda, Y., Morishita, K., ..., Small-Scale Statistics and Structure of Turbulence in the light of high resolution direct numerical simulation, Cambridge University Press vol1. (2012)1-42. 査読有

⑤ Farwig, R., Kozono, H., Yanagisawa, T., Leray's inequality in general multi-connected domains in  $R^n$ , *Math. Ann.* 354, (2012), 137-145. 査読有

DOI 10.1007/s00208-011-0716-6

⑥ Heck, H., Kim, H., Kozono, H., On the stationary Navier-Stokes flows around a rotating body, *Manuscripta Math.* 13 (2012), 315-345 査読有

DOI: 10.1007/s00229-011-0494-1

⑦ Kim, H., Kozono, H., On the stationary Navier-Stokes equations in exterior domains, *J. Math. Anal. Appl.* 395 (2012), 486-495. 査読有

doi:10.1016/j.jmaa.2012.05.039

⑧ Hozono, H., Sugiyama, Y., Yahagi, Y., Existence and uniqueness theorem on weak solutions to the parabolic-elliptic Keller-Segel system, *J. Differential Equations* 253 (2012), 2295-2313. 査読有

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2012.06.001>

[学会発表] (計 2 件)

① 小 藺 英 雄, The Asian Mathematical Conference 2013, June 30--July 4, BEXCO, Busan, Korea 2013年7月1日~4日 韓国講演題目: Leray's problem on D-solutions to the stationary Navier-Stokes equations past an obstacle.

② 金田行雄

1.6th EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING

2012年09月07日~11日オーストリア

講演題目 : Coherent vorticity simulation of  
three-dimensional forced homogeneous  
isotropic turbulence using orthogonal  
wavelets

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小菌 英雄 (KOZONO, Hideo) 早稲田大学・  
理工学術院・教授

研究者番号 : 00195728

(2) 研究分担者

金田 行雄 (KANEDA, Yukio) 愛知工業大学・  
工学部 教授

研究者番号 : 10107691