

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 22 日現在

機関番号：16301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654040

研究課題名(和文) エノン写像のボレル・ラプラス変換によって生成される特殊関数に関する研究

研究課題名(英文) The study of special functions created by Borel-Laplace transform of Henon maps

## 研究代表者

平出 耕一 (Hiraide, Koichi)

愛媛大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：50181136

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：エノン写像の不動点が双曲型であるとき、その安定・不安定多様体を記述する新しい関数を構成した。これは、19世紀末のフランスの数学者ポアンカレの仕事以来の極めて斬新な成果である。さらに、米国の数学者ニューハウスの手法に従って、この研究で構成した新しい関数を利用し、エノン写像のエントロピーを数値計算により得た。この結果は2012年に雑誌論文として出版された。また、ロジステック写像に対しても、同様に、そのエントロピーを数値計算により得た。

研究成果の概要(英文)：In this study, when a fixed point of a Henon map is hyperbolic, new functions describing the stable and unstable manifold have been constructed. This result will give a new development in the research of dynamical systems, in the same way one by a work of Poincare at the end of 19th century. In this study, moreover, by making use of these new functions, the entropy estimation of Henon maps and Logistic maps has been done.

研究分野：力学系理論

キーワード：Borel-Laplace transform dynamical systems entropy stable manifold unstable manifold Henon maps special functions

様式 C - 19、F - 19、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景：双曲型不動点における力学系の線形化についての定理はよく知られている。これは19世紀末の解析的な力学系に対するポアンカレの結果が発端となっている。本研究代表者と研究分担者の共同研究により、ポアンカレとは異なる視点から、エノン写像の双曲型不動点における力学系をシフトに変換する関数の存在についての研究がなされていた。

2. 研究の目的：上記のシフトに変換する関数についての研究を推し進めることが研究目的であった。

3. 研究の方法：本研究代表者と分担者は同一の研究機関の同一部局に所属するので、適宜議論を重ね、また必要に応じて他研究機関に出張し、研究を進めた。

4. 研究成果：エノン写像の不動点が双曲型であるとき、その安定・不安定多様体を記述する新しい関数を構成できた。この関数はエノン写像を不動点においてシフトに変換する。この結果は、19世紀末のフランスの数学者ポアンカレの仕事以来の極めて斬新な成果である。詳しく述べると次のようになる。エノン写像を  $f=f_{\{a, b\}}$  とし、その不動点を一つとり  $P=(x_0, y_0)$  とする。Pの安定多様体と不安定多様体を記述する解析関数を構成するために、Borel変換を2階非線型差分方程式

$$x(t+1) - x(t) - b x(t-1) = -a \{x(t)\}^2$$

に施し、積分方程式

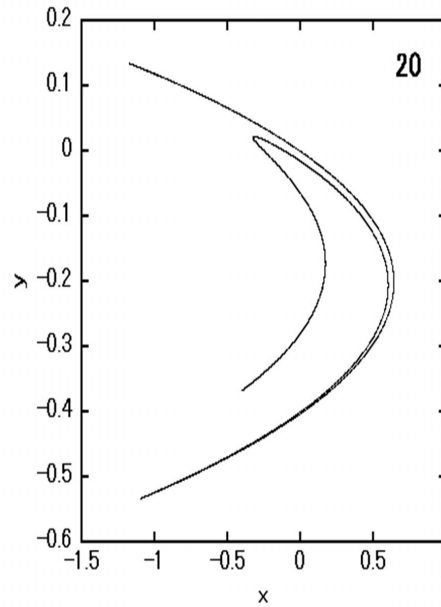
$$AX = -a X * X + C$$

が得られる。この積分方程式を解いてRiemann面  $X$  を得た。このRiemann面は虚軸の右側あるいは左側半平面に格子状に特異点(分岐点)を有していることが分かった。この特異点は

$$(\log \quad )^n$$

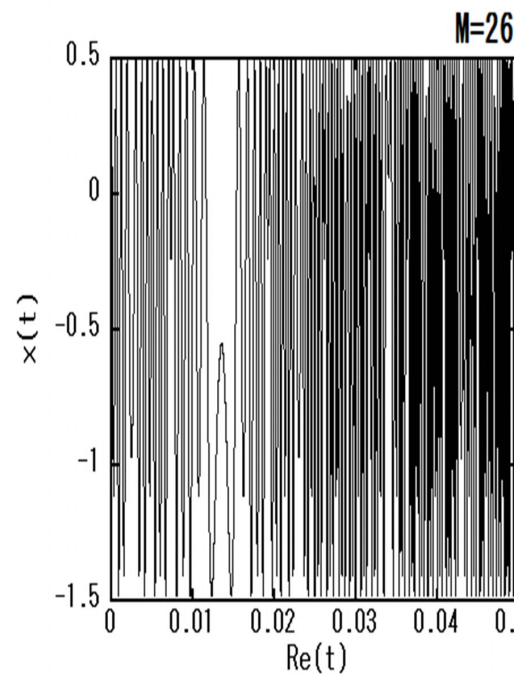
型 ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) であり極めて複雑なものであった。原点とその格子点を通る直線を選んだとき、Riemann面  $X$  を一意化することができ、それを  $X_R$  とし、その直線上で  $X_R$  に対し両側Laplace変換を実行した。得られた関数  $x(t)$  は上記の差分方程式の解であり、整関数であるが、Laplace積分のため  $t$  の負べき展開の形を有している。このように非線型差分方程式の解がBorel-Laplace変換により構成でき、それは収束する漸近展開形として得られた。通常、漸近展開は発散級数であるのに、この研究で得られたものは原点以外の全平面で収束し、さらに原点は除去可能な特異点である。

このことは、極めて例外的で非線型差分方程式の解の特徴だと思われる。本研究は構成的であるので数値計算が出来、実際にエノン写像の安定・不安定多様体を描くことが出来た。次の図は、 $n=20$  までの特異点が解消されたときの不安定多様体の図である。

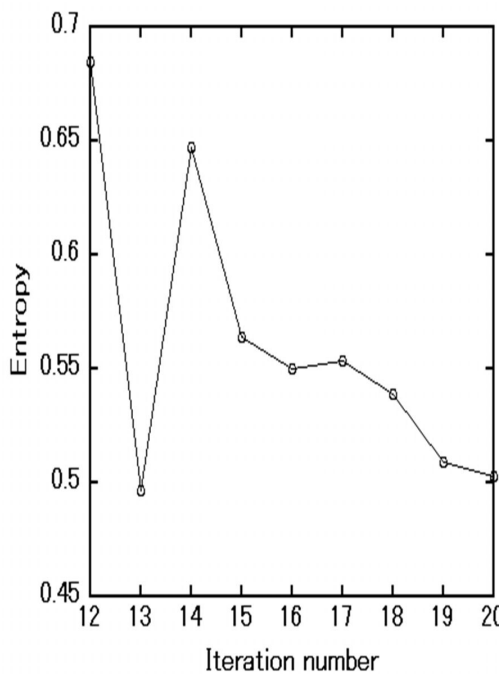


対応する関数  $x(t)$  の漸近展開のグラフは次のようになる。

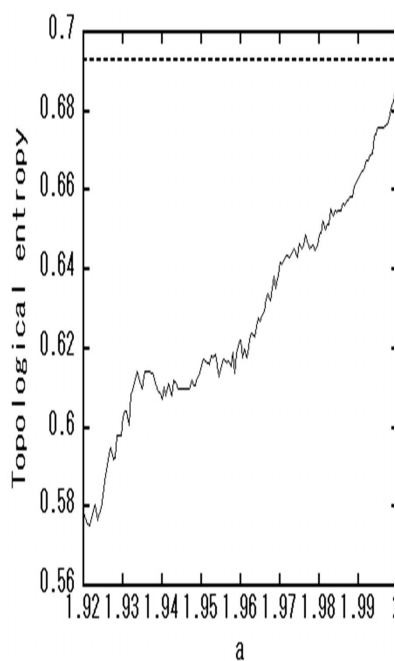
]



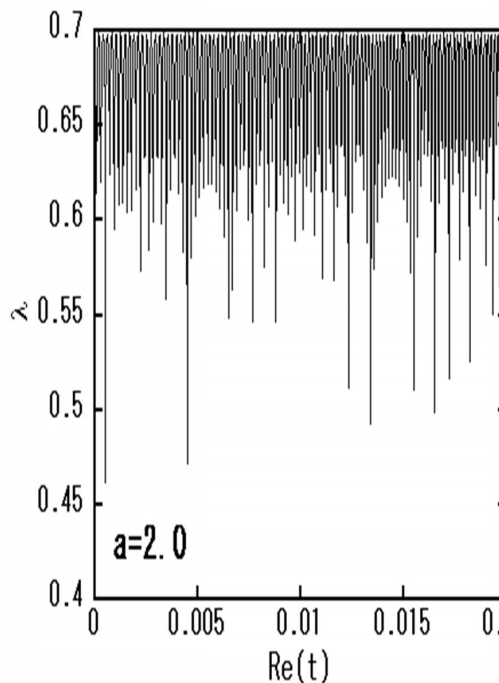
この図では分かり難いが、右側に行くに従って振動が激しくなっていく。この関数を使って、エノン写像のアトラクターのエントロピーを数値計算した。次の図は特異点を解消していくに従って、対応するエントロピーがどのように変化するかを表している。



横軸の iteration number は特異点解消の  $n$  に一致している。 $n$  を無限大とすると真の値となるが、そこまでは出来ないので、打ち切って、エントロピー  $h=0.49703$  を得た ( $a=1.4, b=0.3$  の場合)。



$b=0$  において、同じ手法でエントロピーを計算して得られたグラフが左下の図である。エントロピーが単調増加である様子がみとれる。また、 $b=0$  の場合に、関数  $x(t)$  を利用して、リヤプノフ指数を数値計算してみた。下の図は、 $a=2$  の場合である。理論値は  $\log 2$  である。



この研究で得られた  $x(t)$  は、位数が固有値  $(0 < | \lambda | < 1)$  とするとき  $-\log | \lambda |$  の整数であることが証明できたので、既存の線形化の関数とは異なる（既存の関数は、位数がこの研究のものの逆数であることが分かったので）。またいかなる整数との合成によっても、既存の線形化関数に写らないことも証明できた。

エノン写像のエントロピーを数値計算により得た結果は 2012 年に雑誌 Chaos Solitons fractals から出版された。また、ロジステック写像 ( $b=0$  の場合) に対するエントロピーおよびリヤプノフ指数の数値計算による結果は、現在、雑誌 Chaos にて査読中である。本研究の主結果は、現在その証明が完成した段階で、論文は作成中である。100 ページ前後になる見通しである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

(1) C. Matsuoka and K. Hiraide, Entropy estimation of the Henon attractor, Chaos,

Solitons & Fractals, 査読有, 45, 2012,  
805-809,  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2012.02.013>

〔学会発表〕(計 3 件)

(1) 松岡千博、平出耕一、エノン写像の  
エントロピー、日本数学会、2013 年 09 月  
24 日、愛媛大学(愛媛県・松山市)

(2) C. Matsuoka and K. Hiraide, Henon  
写像に付随する差分方程式の  
Borel-Laplace 変換によって生成される大  
域解、日本数学会、2013 年 03 月 20 日~2013  
年 03 月 23 日、京都大学(京都府・京都市)

(3) C. Matsuoka and K. Hiraide,  
Borel-Laplace 変換を用いたエノンアトラク  
ターの関数表現、日本物理学会、2012 年 0  
9 月 18 日~2012 年 09 月 21 日、横浜国大(神  
奈川県・横浜市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等 : なし

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

平出耕一(HIRAIDE Koichi)

愛媛大学・理工学研究科・准教授

研究者番号 : 50181136

(2) 研究分担者

松岡千博(MATSUOKA, Chihiro)

愛媛大学・理工学研究科・准教授

研究者番号 : 10270266