

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 20 日現在

機関番号：24402

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2013

課題番号：24654043

研究課題名(和文) リウビル・ゲルファント型問題の解の正則性理論の新展開と関連する放物型力学系

研究課題名(英文) New developments of the regularity theory on the solutions to the Liouville-Gelfand type problems and the related parabolic dynamics

研究代表者

高橋 太 (Takahashi, Futoshi)

大阪市立大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10374901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：本研究計画の目的は、リウビル・ゲルファント型非線形固有値問題の解の正則性と特異性に関して、現在まで長く解き残されている未解決問題の解決を目指すことであった。特に極解と呼ばれる解の正則性と特異性について、幾何学的変分問題におけるアイデアと非線形解析の手法を組み合わせることで、領域や解の対称性に依らない統一的な解明を目指してきた。

研究成果は、本研究課題推進期間である2012～13年度中に発表した研究代表者・研究分担者の論文数20編(掲載予定論文含む)、学会発表7回、研究代表者の研究講演回数(海外での講演を含む)21回となる。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research program is to solve the long open problem concerning the regularity and singularity of extremal solutions to the Liouville-Gelfand type nonlinear eigenvalue problems in a unified way, with no assumptions of the domains or the symmetry of solutions, by combining ideas from the geometric variational problems and the techniques of nonlinear analysis.

The research outputs by the research group in the period of the program, 2012-2013, are the following: 20 published papers (including accepted papers), 7 talks at Math. Soc. Japan, 21 talks by the research representative at seminars, including abroad.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：極解 非線形固有値問題 放物型力学系 特異解

1. 研究開始当初の背景

本研究課題でいうリウビル・ゲルファント型問題とは、優線形・単調増大・正な凸非線形項に対する、適当な境界条件下での非線形固有値問題のことであり、比較的良く研究の行き届いた古典的な対象と考えられていた。実際、1970年代の Crandall-Rabinowitz, Joseph-Lundgren による分岐理論の観点からの研究は有名である。解の存在に関して、パラメーターの値に閾値があり、パラメーターの値が閾値より小さい場合には極小解と呼ばれる安定な古典解が存在し、逆に大きい場合には弱解の意味でも解は存在しない。パラメーターの値がちょうど閾値の場合には極解と呼ばれる解が存在し、その正則性や一意性が1990年代から調べられてきた。極解は特異性を持つこともあり、たとえば領域が10次元以上の球体で指数非線形項の場合には極解は対数的特異性を持ち、非有界である。特別な非線形項や領域に対してはこのように厳密弱解が既知の場合があるが、一般領域での特異極解の例は多くは知られていない。一方、最近になって Cabre-Capella は、幾何学的変分問題における特異極小錐の非存在定理 (J. Simons, 1968) の議論の類似を用いて、球対称な半安定解 (特に極解) の正則性が9次元以下の球領域で成り立つことを示した。彼らの結果は球領域以外でも成り立つと予想されているが、その成否は現在まで不明である。

2. 研究の目的

本研究課題では、リウビル・ゲルファント型非線形固有値問題にあらわれる極解などの半安定解の正則性と特異性について、極解などの半安定解の正則性と特異性について、以下の解決を目指すことを目的とした。具体的には次の3点を研究目的として掲げた。

- (1) 領域や解の対称性を仮定せずに、低次元領域での半安定解の正則性を確立すること。
- (2) 一般領域において半安定な特異解を構成すること。
- (3) 放物型力学系の観点から、特異極解の不安定性と瞬間爆発現象の関係を解明すること。

3. 研究の方法

本研究課題の研究推進に際して、年度に分けて以下の研究を行った。

- (1) 平成24年度はリウビル・ゲルファント型問題の解の正則性と特異性に関して、一般領域における最良の正則性の確立およびリヤプノフ・シュミット縮約法による特異半安定解の構成を検討した。
- (2) 平成25年度はリウビル・ゲルファント型問題に付随する半線形放物型方程式の初期

値・境界値問題を考察し、放物型力学系の観点から極解などの半安定解の正則性研究を行った。また、非線形 Neumann 境界条件を持つリウビル・ゲルファント型問題を考察し、Brezis-Caznave-Martel-Ramiandrisoa, Brezis-Vazquez, Cabre-Martel, Martel たちによる先行結果の類似物が、非線形 Neumann 境界条件の場合にも成り立つことを示した。

両年度とも、海外研究者の招聘、相互訪問による研究情報交換、研究代表者や研究分担者が大規模国際研究集会 (Equadiff 13, PRCM Sapporo 等) へ参加することによる研究情報収集、国内連携研究者との緊密な研究連絡等を主たる研究方法とした。

4. 研究成果

本研究課題推進中の2年間の間に得られた研究成果のうち、研究代表者に係るいくつかを以下にまとめる。

(1) デルタ関数的特異性を持つリウビル方程式の爆発点の個数と解のモース指数との関係について、研究代表者の以前の結果を拡張し、爆発点の個数はモース指数とデルタ関数的特異性の個数の和で押さえられることを示した。この結果は、2013年にフロリダで行われた大規模国際研究集会 9th AIMS 紀要に発表された。

(2) べき型非線形項を Neumann 境界データを持つ楕円型方程式を2次元有界領域上で考察し、非線形指数を無限大にした際の最小エネルギー解の漸近挙動について調べ、結果を論文にまとめた。

(3) 非線形 Neumann 境界条件にパラメーターを付き凸単調増大で正な非線形項を持つリウビル・ゲルファント型非線形固有値問題を考察し、閾値よりパラメーターの値が大きい場合には弱解の意味でさえ解が存在しないこと、極解の正則性と一意性、および極解の周りでの線形化固有値問題について成果を得た。この研究は2編の論文にまとめられ、いずれも専門雑誌に掲載予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計20件)

F. Takahashi: Extremal solutions to Liouville-Gelfand type elliptic problems with nonlinear Neumann boundary conditions, 査読有、to appear in Commun. Contemporary Math.

F. Takahashi: Continuum spectrum for the linearized extremal eigenvalue problem with boundary reactions, 査読有、

to appear Math. Bohemica (Equadiff 13 proceedings)

M. Grossi, and F. Takahashi: On the location of two blow up points on an annulus for the mean field equation, 査読有、to appear in Comptes Rendus Mathematique

F. Takahashi: Asymptotic behavior of least energy solutions for a 2D nonlinear Neumann problem with large exponent, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 411, no.1, 95-106 (2014) 査読有、DOI 10.1016/j.jmaa.2013.09.044

F. Takahashi: Morse indices and the number of blow up points of blowing-up solutions for a Liouville equation with singular data, Proceedings of the 9th AIMS (Orlando, Florida) International Conference on "Dynamical Systems, Differential Equations and Applications" Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement, 2013, 729-736 (2013) 査読有

F. Takahashi: Some identities of Green's function for the polyharmonic operator with the Navier boundary conditions and its applications, Mathematische Nachrichten, 286, no.2-3, 306-319 (2013) 査読有、DOI 10.1002/mana.201100236

F. Takahashi: Nonexistence of multi-bubble solutions for a higher order mean field equation on convex domains, "Geometric Properties of Parabolic and Elliptic PDE's". A. Alvino, R. Magnanini, S. Sakaguchi, (ed.). Springer INdAM Ser., Vol.2, Springer Milan, 283-293 (2013) 査読有、DOI 10.1007/978-88-407-2841-8_18

F. Takahashi: On the number of maximum points of least energy solutions to a two-dimensional Henon equation with large exponent, Communications on Pure and Applied Analysis, 12, no.3, 1237-1241 (2013) 査読有、DOI 10.3934/cpaa.2013.12.1237

Y. Seki, Y. Sugiyama, and J.J.L. Velazquez: Multiple peak aggregations for the Keller-Segel system, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 411, no.1, 95-106 (2014) 査読有、DOI 10.1016/j.jmaa.2013.08.065

Y. Sugiyama, Y. Tsutsui, and J.J.L. Velazquez: Global solutions to a chemotaxis system with non-diffusive memory, , 26, 319-352 (2013) 査読有、DOI 10.1088/0951-7715/26/2/319

Y. Sato, and Z.Q. Wang: On the multiple existence of semi-positive solutions for a nonlinear Schrodinger system, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, 30, 1-22 (2013) 査読有、DOI 10.1016/j.anihpe.2012.05.002

他 9 編

〔学会発表〕(計 7 件)

高橋 太、Extremal solutions to Liouville-Gelfand type elliptic problems with nonlinear Neumann boundary conditions, 日本数学会春季年会、学習院大学、2014 年 3 月 17 日

高橋太、Continuum spectrum for the linearized extremal eigenvalue problem with boundary reactions, 日本数学会春季年会、学習院大学、2014 年 3 月 17 日

高橋太、Asymptotic behavior of least energy solutions for a 2D nonlinear Neumann problem with large exponent, 日本数学会秋季総合分科会、愛媛大学、2013 年 9 月 26 日

高橋太、大きな指数を持つ 2 次元 Henon 方程式の最小エネルギー解の最大点について、日本数学会秋季総合分科会、九州大学、2012 年 9 月 19 日

他 3 件

〔その他〕
ホームページ等

研究代表者高橋のプレプリントは大阪市立大学数学研究所(OCAMI)の OCAMI Preprint Series http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/preprint/index_13.html でダウンロード可

研究分担者：杉山由恵の HP <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~sugiyama/index.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

高橋 太 (TAKAHASHI Futoshi)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10374901

(2)研究分担者

杉山 由恵 (SUGIYAMA Yoshie)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・
教授

研究者番号：60308210

(3)研究分担者

佐藤 洋平 (SATO Yohei)

埼玉大学・理工学研究科・講師

研究者番号：00465387