

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 21 日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2013

課題番号：24656072

研究課題名(和文)非定常波動問題に対する時間域境界要素法の高速度アルゴリズムの開発と応用

研究課題名(英文)Development and application of the fast algorithm for the time-domain boundary element method for transient wave problems

研究代表者

高橋 徹(Takahashi, Toru)

名古屋大学・工学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：90360578

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：境界要素法は、時間領域の(=非定常の)波動問題に対して高精度な数値解法であるが、その膨大な計算量が欠点である。本研究はこの欠点を根本的に解決するための高速多重極法型の高速度アルゴリズムを提案し、非定常波動問題に対する高速境界要素法を開発した。具体的には、二体相互作用を表わす関数を多項式近似によって変数分離表現するアイデア(これはブラックボックス高速多重極法に由来する)を、3次元スカラー波動方程式の時間依存グリーン関数に適用し、関数補間に基づく時間領域高速多重極法を構成した。その定式化に基づいて計算プログラムを作成し、数値実験を通じて、提案する高速解法の妥当性を検証した。

研究成果の概要(英文)：The bottleneck of the boundary element method is its high computational cost, although the method is very accurate for the transient wave problems. To overcome this difficulty, the present study proposed an FMM-like fast algorithm and developed a fast boundary element method for wave problems in time domain. Specifically, the idea to approximate a two-body interaction function with polynomials in order to obtain its representation in the separation of variables, which originates from the black-box fast multiple method, is applied to the time-dependent Green's function for the three-dimensional scalar wave equation of interest. As a result, a time-domain interpolation-based fast multipole method was developed successfully. Through the numerical experiments with the implemented computer program, the proposed method was validated.

研究分野：工学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎

キーワード：境界要素法 高速多重極法 波動方程式 関数補間 反復解法 音響問題 高速解法 非定常問題

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式の(初期値)境界値問題の数値解法として、境界要素法(境界積分方程式法)が高精度であることはよく知られているが、境界要素法は古典的多体問題と同じ計算原理を有するため、大規模解析においてはその膨大な計算量がボトルネックとなる。この問題に対する研究動向として、高速多重極法(fast multipole method)と呼ばれる分割統治型の高速度アルゴリズムの研究が近年盛んに行われている。その結果、静的問題(ポテンシャル問題、静弾性問題等)および定常問題(音響問題、電磁場問題等)に対する境界要素法の高速度化は概ね達成されたと言ってよい。一方、本研究が取り組む非定常波動問題(時間依存問題)に関しては、本研究代表者による先駆的な研究(Takahashi et al, 2002)を含む少数の研究に留まるだけであり、今後も研究の進展が望まれている。

本研究の着想は、静的問題に属するブラックボックス高速多重極法の研究から得たものである。この形式の高速多重極法の中核となる概念は、任意の二体相互関数(一般に時間に依存しない連続関数)を多項式で近似することである。そこで、この近似手法が本対象の時間領域境界要素法に現れるグリーン関数(時間依存の不連続関数である!)に拡張できれば、時間領域版の高速多重極法も構成できるはずである。この着想を得た後、予備検討を経て、本研究の実施に至った。

2. 研究の目的

研究開始当初の本研究の目的は次の通りである。

- ① 3次元スカラー波動問題を対象として、その時間依存グリーン関数の多項式近似を基とした高速多重極法型の高速度アルゴリズムを構成し、時間領域境界要素法の計算量のオーダーを根本的に低減する。そのプログラムを開発し、計算速度および計算精度を評価する。
- ② 計算負荷を軽減するために、マルチコアCPUを活用可能とするマルチスレッド型の並列計算手法を開発する。
- ③ 副次的な計算量を低減するために、本高速アルゴリズムを構成する種々の演算子(離散化後は行列として表現される)を特異値分解により低ランク化するための手法を開発する。
- ④ スカラー波動問題の発展として電磁波動問題に取り組み、大規模な3次元非定常電磁場解析を実現する。

3. 研究の方法

まず、目的①~③に応じて、本高速解法の構築を行った。ブラックボックス高速多重極法の要領により、本研究が対象とする3次元

スカラー波動問題の時間依存グリーン関数を多項式補間によって近似的に変数分離表現できれば、時空内の「遠い」位置関係にある相互作用の計算を高速に計算できるものと期待される。実際、本研究は3次元エルミート補間を用いることが、計算精度の観点から妥当であることを見出した。具体的には、解くべき初期値境界値問題の空間自由度(境界要素数)を N_s 、時間自由度(時間ステップ数)を N_t と表すとき、従来法(直接法)の必要計算量が $O(N_s^2 N_t)$ であるのに対して、本高速解法のそれは $O(N_s^{1+\delta} N_t)$ である。ここで、境界要素分布が典型的な場合、 δ は1よりも小さくなることを示すことができる(すなわち、従来法よりも本質的に高速である)。また、補間精度(近似精度)が補間点数によって概ねコントロールできることを数値実験において確認できた。この性質は本手法が計算速度と計算精度のトレードオフを有することを示すものである。ただし、補間点数の増加に対する誤差の収束レートが小さい点は今後課題を残した。

時間依存グリーン関数を3次元エルミート補間によって近似可能であることを確認後、本高速解法のアルゴリズムを構築した。その際、熱問題に関する先行研究(Tausch, 2006)が参考となったが、波動問題では影響が遠方かつ長時間にわたり伝搬する(他方、熱問題では指数的に減衰する)という性質により、新しいアルゴリズムが必要である。最も苦心したのはいわゆるM2L計算(多重極モーメントから局所展開係数への変換;空間のみならず時間に依存するために難しい)である。素朴には、ある時間区間からの影響は未来の全時間区間に影響するため、必要計算量は $O(N_t)$ から $O(N_t^2)$ に増大してしまう。ところが、時間依存グリーン関数のサポートが有限であることに注目すれば、未来の時間区間は所定の範囲で打ち切ることができることを見出した。これにより、必要計算量を $O(N_t)$ に留めることが可能となった。その結果、本高速解法の計算量は $O(N_s^{1+\delta} N_t)$ となる。

上記のM2L計算は本高速解法の中では比較的計算負荷が高い。そこで研究目的③として、その計算負荷の軽減を試みた。研究当初は特異値分解が有望であると考えていたが、のブラックボックス高速多重極法に関する研究論文(Schobert et al, 2012)を参考として、FFTを用いたM2L計算の高速化が本研究にも適用可能であることが判明し、それを採用した。具体的には、空間に関する補間点数を p_s 、時間に関する補間点数を p_t と表すと、FFTを用いない場合のM2Lの必要計算量は $p_s^6 p_t^2$ であるのに対して、FFTを用いた場合には $p_s^3 p_t (\log(p_s) + \log(p_t))$ に低減できる。

上記の理論に基づき、計算プログラムを開発した。その際、研究目的②を考慮して、プログラムの並列化およびベクトル化を行った。並列化にあたっては、OpenMPを利用し、基本的には空間セルのループを並列化した。

これは実装が簡単である上、階層構造のレベルが深い場合には有効である。ベクトル化に関しては、高速多重極法の各種変換の最も内側のループを対象として行った。実際には、インテル社の AVX 演算器を利用した。

4. 研究成果

(1) 3次元スカラー波動問題

本研究が主対象とした3次元スカラー波動方程式に対する高速境界要素法の理論と数値実験による検証は、下記の発表論文①に詳述してある。ここではその主要な成果を述べる。

以下では、半径1の球形の固い散乱体に平面波を照射する外部散乱問題を、従来の時間領域境界要素法 (Conventional TDBIEM) および本高速解法 (Proposed TDBIEM) を用いて解いた。本高速解法については補間点数 (p_s , p_t ; 同数とした) をパラメータとして実行した。

図1は境界要素数 N_s に対して各解法の厳密解に対する相対誤差をプロットしたものである。高速解法は、パラメータの増加と共に、従来法に漸近することがわかる。これは、高速解法の計算精度がパラメータによってコントロールできることを示唆している。

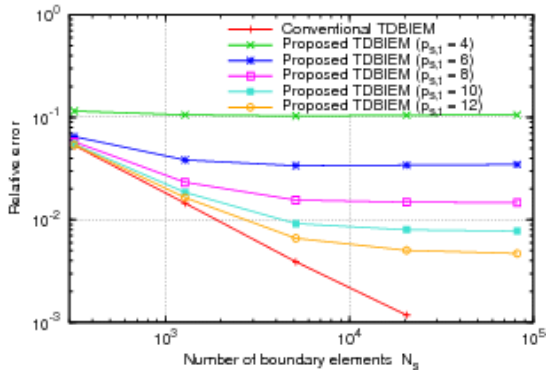


図1. 計算精度の比較 (発表論文①の Fig. 13 より引用)

図2は計算時間を比較している。従来法が $O(N_s^2)$ であるのに対して、提案する高速解法はそれ以下の $O(N_s^{4/3})$ となっており、高速化が実現されていることがわかる。

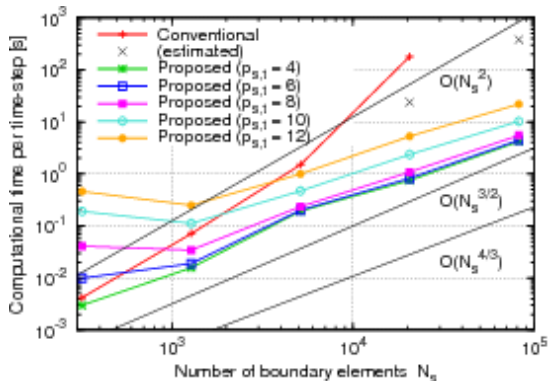


図2. 計算時間の比較 (発表論文①の Fig. 15 より引用)

より引用)

本高速解法の一つの問題点は、図1に見るように、高速解法はパラメータの増加に伴う精度の改善レートは必ずしも高くない、と言う点である。そのため、高速解法と同じ精度で比較すると従来法の方が高速であると言うケースもある。しかしながら、従来法によって大規模な問題 (本計算例では概ね N_s が 10^4 以上) を解くことは事実上困難である。したがって、低精度ではあるとしても、大規模な問題を解くにあたっては高速解法は不可欠と言える。

実際的な応用として、図3のようなモデルにおける音響散乱シミュレーションを実行した。モデル全体は無限領域内に固定されている。モデル内部には二つの「部屋」が設けられており、それらはドアを通してつながっている。点音源が右側の部屋の中央部に設けられており、音波はモデル内部で反射しつつ、開放された窓やドアを通じてモデル外部に放射する。

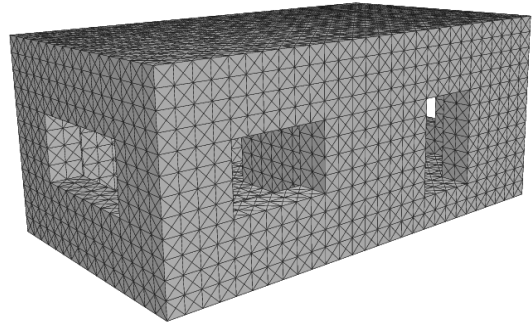


図3. 計算モデル (12704 個の三角形境界要素を使用; 発表論文①の Fig. 16(a) より引用)

図4は右側の部屋の床の中央付近における音圧の時間プロファイルを示している。基本的には、モデル外部への放射による減衰を伴いながら、左右の部屋を行き来する正弦的な挙動が見てとれる。ここで従来法と比較すると、高速解法は、補間点数の比較的小さい場合 ($p_{s,t}=6$)、時間発展と共に不安定化していることがわかる。このような時間不安定性は、従来法においても散見されるために、必ずしも高速解法にだけ原因があるとは言えないが、高速解法の安定化は今後の課題の一つである。

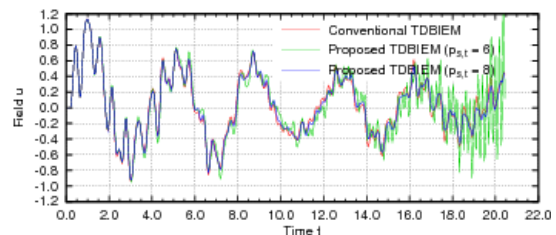


図4. モデル内部における (発表論文①の Fig. 17(a) より引用)

以上の数値実験により、本高速解法の妥当

性が検証されたと考えられる。

(2) 3次元電磁波動問題への応用

研究目的④として、スカラー波動問題に対する定式化を拡張して、電磁波動問題に取り組んだが、今後に課題を残した。電磁波動問題において扱うべき積分方程式では、スカラー波動問題とは異なる階数の時間微分項が現れる。結果として、M2L 計算の計算対象を未来の一部の時間区間に限定することができない。これを解決するためには、スカラー波動方程式の場合に用いた時間線形基底とは別の基底を使う必要があるとの結論に至ったが、適当な候補は見い出せなかった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計2件)

- ① Toru Takahashi, An interpolation-based fast-multipole accelerated boundary integral equation method for the three-dimensional wave equation, *Journal of Computational Physics*, Vol. 258, 2014, 809-832
DOI: 10.1016/j.jcp.2013.11.008
- ② Emmanuel Agullo, Bérenger Bramas, Olivier Coulaud, Eric Darve, Matthias Messner, Toru Takahashi, Task-based FMM for multicore architectures, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol.36(1), 2014, C66-C93
DOI: 10.1137/130915662

[学会発表] (計3件)

- ① Toru Takahashi, An interpolation-based fast multipole integral equation method for wave equation, 第62回理論応用力学講演会, 2013年3月6日~8日, 東工大(大岡山キャンパス)
- ② Toru Takahashi, A time-domain BIEM for wave equation accelerated by fast multipole method using interpolation, The 11th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (WAVES 2013), 2013年6月3日~7日, Gammarth, Tunisia
- ③ Toru Takahashi, An interpolation-based fast multipole boundary integral equation method for wave equation, The 12th U.S. National Congress on Computational Mechanics (USNCCM12), 2013年7月22日~25日, Raleigh, North Carolina, USA

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 徹 (TAKAHASHI, Toru)
名古屋大学・大学院工学研究科・講師
研究者番号: 90360578

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

以上