

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 12 日現在

機関番号：13901  
研究種目：若手研究(A)  
研究期間：2012～2015  
課題番号：24684001  
研究課題名(和文)モチヴィックガロア群 - 数論幾何学を越えて -

研究課題名(英文) motivic Galois group

## 研究代表者

古庄 英和 (Furusho, Hidekazu)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：60377976

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,200,000円

研究成果の概要(和文)：不分岐な混合テートモチーフのモチヴィックガロア群の研究で重要となるアソシエーターと多重ゼータ値を重点的に研究した。

1. アソシエーターと繋がる様々な数学を追求した。とりわけアソシエーターにより結び目理論と整数論を繋がることに注目し、結び目に有理数体の絶対ガロア群を作用させることにより結び目に入る隠れた数論的構造を露呈させた。
2. 解析数論の研究者達とある種の複素多重ゼータ関数の特異点解消法とp進の多重ゼータ関数の構成法について共同研究を行った。

研究成果の概要(英文)：This research was mainly focused on the study of associators and multiple zeta values which are essential in the study of motivic Galois group of unramified mixed Tate motives:1. We pursued various topics related to associators, in particular a relationship caused by associators between knot theory and number theory. We revealed a hidden arithmetic structure of the space of knots by constructing an action of the absolute Galois group of the rational number field. 2. In our joint work with analytic number theorists, we produced a method of desingularization of complex multiple zeta functions and also a construction of p-adic multiple zeta functions.

研究分野：代数学

キーワード：モチヴィック基本群 Teichmüller-Legoの哲学 多重ゼータ値 Kashiwara-Vergne予想 結び目理論

### 1. 研究開始当初の背景

今や、モチーフの研究は、数論幾何学における最も重要な研究の一つとなっているといえよう。ある種基本的な(不分岐混合 Tate 型の)構造を有するモチーフ全体を統制する群がモチヴィックガロア群であり、この群の研究は、数論幾何学のみならず数学の様々な分野の研究に繋がっていることが近年 Cartier, Connes, Kontsevich, Manin などによって指摘されている。

特に、Grothendieck が数論幾何学の研究において「Esquisse d'un programme('84)」で提出した「Teichmuller-Lego の哲学」の一端が、Drinfeld の数理論理学(特に共形場理論 KZ 方程式)の研究において Grothendieck-Teichmuller 群('91) となり出現している点は注目すべきである。この群は、Deligne-Drinfeld-Ihara らによってモチヴィックガロア群と一致していることが予想されている。Brown らの仕事によりこの予想は現在部分的に展開している。この予想は「数論幾何学と数理論理学の謎の共鳴現象」の一端と捉えられている。

### 2. 研究の目的

本研究の狙いはモチヴィックガロア群の数論幾何学を越えた他分野とのつながりを明らかにすることである。

モチヴィックガロア群の研究で不可欠である Grothendieck-Teichmuller 群とは、Drinfeld('91) が数理論理学(特に共形場理論、KZ 方程式)の研究において導入した群であるが、実はそれ以前の Grothendieck の数論幾何学の研究(特に、Teichmuller-Lego の哲学)で存在が示唆されていた群でもあった。そのような由来ゆえかこの群は数学の様々な分野と関連していることが分かってきている。本研究は、このような数学の諸分野とこの群とのつながりをより鮮明にしていくことを図っている。

特に Brown の研究により新展開を見せているモチヴィックガロア群の研究、Drinfeld により数理論理学の側面が明らかにされた Grothendieck が提唱した Teichmuller-Lego の哲学、多重ゼータ値の間に成り立つ最も基本的な代数関係式である double shuffle 関係式の背後にある数論幾何学、近年解決された Kashiwara-Vergne 予想のモチーフ論的背景の研究、Willwacher, Fresse らによるオペラッドと Grothendieck-Teichmuller 群に関する研究、そして結び目理論の研究との関わりを究めていくことを目的としている。

### 3. 研究の方法

まずは、モチヴィックガロア群の研究で不可欠となるアソシエーターを重点的に調べ上げ、アソシエーターを介して結び目理論と整数論が繋がることを汎用して結び目理論から様々な数論幾何学的構造を取り出す。

結び目理論のみならず低次元トポロジーの整数論的側面の研究に取り組む。結び目(絡み目)の普遍量子不変量と言われる Kontsevich 不変量には、Grothendieck-Teichmuller 群の定義式である五角形関係式と二つの六角形関係式を用いた代数的な再構成法が Bar-Natan, Cartier, Le-Murakami, Kassel, Piunikhin らによって与えられている。彼らの議論を進展させることにより、結び目全体の空間へのモチヴィックガロア群の直接的な作用を構成し、これにより結び目の様々な整数論的性質を抽出していく。

また、モチヴィックガロア群に関連する様々な群の相互関係についても取り組む。特に Alekseev - Torossian が Kashiwara-Vergne 予想の解決で導入した Kashiwara-Vergne 群は興味深く、この群は Grothendieck-Teichmuller 群と同型であると予想されている。この群とモチヴィックガロア群との関係について詳しく調べる。一方、多重ゼータ値の関係式の中で最も基本的な関係式といわれる double shuffle 関係式から定義される double shuffle 群という副代数群があり、これも Kashiwara-Vergne 群と同型であると予想されている。Kashiwara-Vergne 群の定義方程式の背後に存する幾何学と double shuffle 関係式の数論幾何学との関連をより明らかにしていく。

### 4. 研究成果

不分岐な混合テートモチーフのモチヴィックガロア群の研究で重要となるアソシエーターと多重ゼータ値を重点的に研究し以下の成果を得ている。

(1). アソシエーターに繋がる様々な数学を追求し解説した(以下5の発表論文[2])。

(2). アソシエーターにより結び目理論と整数論を繋がることに注目し、結び目に有理数体の絶対ガロア群を作用させることにより結び目に入る隠れた数論的構造を露呈させた(arXiv:1211.5469)。

(3). Kontsevich 不変量の代数的・組み合わせ論的再構成法の技術を副有限群論の議論に昇華させることにより、有理数体  $\mathbb{Q}$  の絶対ガロア群の結び目の張る副有限空間への直接的な作用を構成した。この議論をモチヴィックガロア群に対しても展開して結び目の整数論的構造を続論文(arXiv:1405.4575)で追求した。

(4). 結び目理論で得られる多重ゼータ値の関係式について組織的に扱う手法を展開し、結び目理論を用いて得られる多重ゼータ値の関係式は全てアソシエーターの関係式より誘導されることを示した(arXiv:1501.06638)。

(5). Drinfeld の Grothendieck-Teichmüller 群の理論と Racinet の double shuffle 関係式の理論の相関関係について数論幾何的由来を明らかにした研究代表者の以前の結果 (Ann. Math, 2011) を、ある種の円分拡大体に対しての拡張を与えた (発表論文[3])。

(6). Enriquez 氏との共同研究 (発表論文[4]) ではこの研究に関する技術的な部分を発展させ、さらなる拡張を与えた。現在も引き続き Racinet の理論の幾何学的意味付けを目指して共同研究を続行中である。

(7). 国内の数論幾何学の研究者達と CM 楕円曲線の  $p$  進ボリログ層の性質に関して共同研究を行い共著論文[1]を発表した。

(8). 多重ゼータ関数には無数の極が現れることが知られているが、この極を一気に解消するという特異点解消理論を国内の解析数論の研究者達との共同研究 (arXiv:1508.06920) で編み出した。Essouabri 氏はこの理論をより一般的なゼータ関数に対して発展させてくれている。この研究以外に、三氏と共同で  $p$  進多重ゼータ関数の  $p$  進測度を使った具体的な構成を与えた (arXiv:1508.07185)。  $p$  進の分野では本質的に多変数である  $p$  進ゼータ関数としては最初の構成である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

1. Hidekazu Furusho, Kenichi Bannai and Shinichi Kobayashi;  $p$ -adic Eisenstein-Kronecker series for CM elliptic curves and the Kronecker limit formulas, Nagoya Math. J. 219 (2015), 269-302. 査読有.

2. Hidekazu Furusho; Around associators, Automorphic forms and Galois representations, 2, 105-117, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 415 (2014), Cambridge Univ. Press, Cambridge. 査読有.

3. Hidekazu Furusho; Geometric interpretation of double shuffle relation for multiple L-values, Galois-Teichmüller theory and Arithmetic Geometry, Advanced Studies in Pure Math 63 (2012), 163-187. 査読有.

4. Hidekazu Furusho and Benjamin Enriquez; Mixed Pentagon, octagon and Broadhurst duality equation, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol 216, Issue 4, (2012), 982-995. 査読有.

[学会発表](計 34 件)

1. Hidekazu Furusho; Low dimensional topology and number theory VIII, IMAQ Seminar Room, Innovation Plaza, Fukuoka, Japan, March 22 - 25, 2016.

2. Hidekazu Furusho; Algebraic Number Theory and Related Topics, RIMS, Kyoto, Japan, 30th. November-4th. December. 2015.

3. Hidekazu Furusho; Zeta Functions of Several Variables and Applications, Nagoya University, Nagoya, Japan, 9th-13th. September. 2015.

4. Hidekazu Furusho; GRT, MZVs and associators, Les Diabes, Switzerland, 20th-29th. August. 2015.

5. Hidekazu Furusho; Kansai Multiple Zeta Values Workshop, Kyoto Sangyo University, Kyoto, Japan, 16th. May. 2015.

6. Hidekazu Furusho; Seminaire Groupes de Lie et espaces de modules, Section de mathematiques, Universite de Geneve, Geneva, Switzerland, 2nd. April. 2015.

7. Hidekazu Furusho; Seminaire Quantique, IRMA, Strasbourg, France, 30th. March. 2015.

8. Hidekazu Furusho; 2015 TMS Winter School on Number Theory, Taida Institute for Mathematical Science, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 9th-13th. February. 2015.

9. Hidekazu Furusho; PMI Number Theory Seminar, Department of Mathematics, POSTECH, Pohang, South Korea, 5th. January. 2015.

10. Hidekazu Furusho; Colloquium, Tohoku

University, Sendai, Japan, 17th. November. 2014.

11.  
Hidekazu Furusho; Tresses et Arithmetique, Centre International de Rencontres Mathematiques, Luminy, France, 13th-17th. October. 2014.

12.  
Hidekazu Furusho; Homotopical Algebra, Operads and Grothendieck-Teichmuller groups, Universite Nice Sophia Antipolis, Laboratoire J.A. Dieudonne, Nice, France, 9th-12th. September. 2014.

13.  
Hidekazu Furusho; Intelligence of Low-dimensional Topology, RIMS, Kyoto, Japan, 21st-24th. May. 2014.

14.  
Hidekazu Furusho; Seminar on Analytic Number Theory, Nagoya University, Nagoya, Japan, 8th. April. 2014.

15.  
Hidekazu Furusho; MSJ Spring Meeting 2014, Gakushuin University, Tokyo, Japan, 15th-18th. March. 2014.

16.  
Hidekazu Furusho; Seminaire d'algebre, Institut Camille Jordan, Universite Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France, 12th December. 2013.

17.  
Hidekazu Furusho; Japanese Turkish Joint Geometry Meeting, Galatasaray University, Istanbul, Turkey, 21st-24th. November. 2013.

18.  
Hidekazu Furusho; General Mathematics Seminar, University of Luxembourg, Luxembourg, Luxembourg, 22nd October. 2013.

19.  
Hidekazu Furusho; Joint UAM-ICMAT Seminar, Algebra and Combinatorics, Instituto de Ciencias Matematicas Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain, 4th October, 2013.

20.  
Hidekazu Furusho; Exploratory Workshop, New Approaches To Multiple Zeta Values, Instituto de Ciencias Matematicas

Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain, 30th September-2nd October, 2013.

21.  
Hidekazu Furusho; Motivic Galois Groups, Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary, 2nd-6th. September. 2013.

22.  
Hidekazu Furusho; Seminar on Algebra, Geometry and Physics, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany, 16th. July. 2013.

23.  
Hidekazu Furusho; MPI-Oberseminar, Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany, 13th. June. 2013.

24.  
Hidekazu Furusho; Higher Structures in Topology and Number Theory, Clay Mathematics Institute workshop, Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford, UK, 15th-16th. April. 2013.

25.  
Hidekazu Furusho; Grothendieck-Teichmuller theory and Multiple Zeta Values of Grothendieck-Teichmuller Groups, Deformation and Operads, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK, 8th-12th. April. 2013.

26.  
Hidekazu Furusho; Lecture of Grothendieck-Teichmuller Groups, Deformation and Operads, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK, 13th. February. 2013.

27.  
Hidekazu Furusho; Introductory Workshop of Grothendieck-Teichmuller Groups, Deformation and Operads, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK, 8th-10th. January. 2013.

28.  
Hidekazu Furusho; Tuesday Seminar on Topology, Tokyo University, Tokyo, Japan, 6th. November. 2012.

29.  
Hidekazu Furusho; Low-Dimensional Topology and Number Theory, Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach, Oberwolfach, Germany, 26th.  
August.-1st. September. 2012.

30.

Hidekazu Furusho; Periods and Motives, A  
Modern Perspective on Renormalization,  
Instituto de Ciencias Matematicas  
Universidad Autonoma de Madrid, Madrid,  
Spain, 2nd-6th. July. 2012.

31.

Hidekazu Furusho; String seminar, Nagoya  
University, Nagoya, Japan, 28th. June.  
2012.

32.

Hidekazu Furusho; Polylogarithmes en  
algebre et en topologie, Laboratoire J.A.  
Dieudonne, Nice, France, 14th-16th. June.  
2012.

33.

Hidekazu Furusho; Colloque a l'occasion  
des 80 ans de Pierre Cartier, Dialogues  
autour de l'algebre, la geometrie et les  
fonctions multizetas, IHES, Paris, France,  
11th-12th. June. 2012.

34.

Hidekazu Furusho; Colloquium in  
Mathematics, Kyushu University, Hakata,  
Japan, 26th. April. 2012.

〔図書〕(計 1 件)

1.

古庄英和著 ; 小谷久寿, 新甫洋史記述.  
結び目と Grothendieck-Teichmuller 群,  
Math-for-Industry レクチャーノートシリ  
ーズ. Vol 68, 111 ページ  
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所.

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年月日 :

国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年月日 :

国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古庄 英和 (FURUSHO, Hidekazu)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号 : 60377976

(2) 研究分担者

( )

研究者番号 :

(3) 連携研究者

( )

研究者番号 :