

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 8 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2012～2016

課題番号：24684002

研究課題名(和文)高次元代数多様体の双有理幾何学

研究課題名(英文)Birational geometry for higher-dimensional algebraic varieties

研究代表者

藤野 修 (Fujino, Osamu)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60324711

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,000,000円

研究成果の概要(和文)：私は主に高次元複素射影代数多様体に興味を持っています。私は、コンパクト台コホモロジー上の混合ホッジ構造の理論を用いて小平の消滅定理の強力な一般化をいくつか確立しました。応用として、極小モデル理論の基本定理たちを半対数的標準対や擬対数的スキームに対して証明しました。さらに、コンパクト台コホモロジー上の混合ホッジ構造の変動を考えることにより、私は藤田・ズッカー・川又半正値性定理の一般化を得ました。その応用の一つとして、安定多様体のモジュライ空間の射影性を証明しました。

研究成果の概要(英文)：I am mainly interested in higher-dimensional complex projective varieties. I established several powerful generalizations of the Kodaira vanishing theorem by using the theory of mixed Hodge structures on cohomology with compact support. As applications, I proved the fundamental theorems of the minimal model theory for semi-log canonical pairs and quasi-log schemes. Moreover, by considering variations of mixed Hodge structures on cohomology with compact support, I obtained a generalization of the Fujita-Zucker-Kawamata semipositivity theorem. As an application, I proved the projectivity of the moduli spaces of stable varieties.

研究分野：数学、代数幾何学、双有理幾何学、高次元代数多様体論

キーワード：極小モデル理論 混合ホッジ構造 半対数的j標準対 消滅定理 半正値性定理 擬対数的スキーム 乗数イデアル層 藤田予想

1. 研究開始当初の背景

(1) 高次元代数多様体の双有理幾何学は2000年代半ばに歴史的な大発展を遂げた。その後、大きな発展が断続的に続いている状態であった。私はその大発展も視野に入れつつ、独自路線で極小モデル理論の基礎を確立するという方向を目指していた。

(2) 少し具体的に述べると、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の理論を積極的に用いることにより、極小モデル理論の基本定理などの適用範囲を限界まで拡張することに取り組んでいた。

(3) 最近あまり研究していなかったが、トーリック多様体を用いて病的な例を構成するという類の研究や、解析的手法を用いた研究にも常に興味を持っている。時間と能力の問題で混合ホッジ構造の理論を用いた研究を優先していたが、可能であれば高次元代数多様体の解析的側面も研究したいと考えている。

(4) ここ数年の極小モデル理論の発展はとても激しく、私が研究を始めた20年ほど前にはとても解決できないであろうと思われていた大予想が、次々に証明されている。

2. 研究の目的

(1) 高次元代数多様体の双有理分類論の標準理論の一つである極小モデル理論は魅力的な研究対象であるが、まだ完成していない。近い将来に完成するかどうかは分からないが、少しでもその発展に貢献したいと思っている。

(2) 極小モデル理論の研究といってもいろいろな側面がある。特異点の分類などを中心とした研究は王道の一つである。また、極小モデルの存在定理を目指す方向も一つの王道であろう。私は、極小モデル理論で使われるコホモロジーの消滅定理に興味を持っている。コホモロジーの消滅定理を中心に極小モデル理論の基本的な部分を深く理解したいというのが目的、目標の一つである。

3. 研究の方法

(1) すでに述べたように、主に高次元代数多様体のコホモロジー論的側面を研究してきた。ここ数年間は混合ホッジ構造の理論を組織的に極小モデル理論に応用していた。高次元代数多様体の構造を深く理解することが究極の目標なので、役立つと思ったらどんな研究手法でも柔軟に取り入れていくという姿勢である。

(2) 混合ホッジ構造の研究に時間とエネルギーがとられ、あまり系統立てて研究出来て

いなかったが、解析的手法にも興味があるし、解析的な手法での研究成果もある。今後必要に応じて解析的側面を研究していきたいと思っている。

4. 研究成果

(1) 2007年頃から約10年間にわたり、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の理論を極小モデル理論に応用するという計画を実行してきた。この研究は近日中に出版される予定の著書で一段落という感じである。基本的な部分はすべて完成し、今後はこの新しく構築された枠組みを具体的な問題に応用するという局面に入っていくはずである。

(2) 少し具体的に述べたい。極小モデル理論の基本的な結果は、小平の消滅定理の一般化である川又フィーベック消滅定理を使って証明されることが多い。見方によると、ほぼすべての結果が広中の特異点解消定理と川又フィーベック消滅定理の応用とみなせるかもしれない。そこで自然な発想として、小平の消滅定理の強力な一般化を確立すると極小モデル理論をさらに発展させることが出来るのではないかと考えられる。実際、小平の消滅定理の一般化の一つであるネーデルの消滅定理にもたくさんの応用があり、コホモロジーの消滅定理の有用さに関しては疑いの余地はなかった。私は数年間の試行錯誤の後、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の理論を足掛かりに、小平の消滅定理の究極の一般化の一つにたどり着いた。これが2007年頃のことである。

(3) その後、極小モデル理論にこの新しい視点を持ち込むことにより、半対数的標準対や擬対数的スキームに対して錐定理などの極小モデル理論の基本定理を拡張した。また、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の変動を調べることにより、ホッジ束に対する半正値性定理も確立した。この研究の一部は、藤澤太郎東京電機大学教授、斉藤盛彦京都大学数理解析研究所准教授との共同研究である。応用としては、安定多様体のモジュライ空間の射影性の証明などがある。私ここ数年の研究は、高次元代数多様体の研究に必要な道具を整備したという類いのものなので、今後たくさんの応用がえられることを期待している。

(4) ここで述べたもの以外にもいくつかの研究成果があるが、いちばんエネルギーを注いだのはコホモロジーの消滅定理関連のこの話題である。私が理論の基礎を整備していたここ数年間、基本的に私の仕事の追従者は誰もいなかった。近日中に出版される予定の著書で基礎理論がすべて整備されたことになる。今後は私の構築した新しい枠組みで極小モデル理論の研究を推進する若手が出てくることを期待している。今現在、私の研究

成果はまだ十分に理解されていないと思う。天の邪鬼の私は流行の話題を避け、独自路線で将来を見据えた基礎的な研究をおこなってきたつもりである。10年後20年後に私の仕事がどのように評価され利用されているのが楽しみである。ここ数年は十分な研究成果が得られたと思っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Osamu Fujino, Direct images of relative pluricanonical bundles, *Algebr. Geom.* 3, 2016, 50–62. DOI: 10.14231/AG-2016-003 査読有り

Osamu Fujino, Taro Fujisawa, Variations of mixed Hodge structure and semipositivity theorems, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 50, 2014, 589–661. DOI: 10.4171/PRIMS/145 査読有り

Osamu Fujino, Fundamental theorems for semi log canonical pairs, *Algebr. Geom.* 1, 2014, 194–228. DOI: 10.14231/AG-2014-011 査読有り

Osamu Fujino, Yoshinori Gongyo, Log pluricanonical representations and the abundance conjecture, *Compos. Math.* 150, 2014, 593–620. DOI: 10.1112/S0010437X13007495 査読有り

Osamu Fujino, Taro Fujisawa, Morihiko Saito, Some remarks on the semipositivity theorems, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 50, 2014, 85–112. DOI: 10.4171/PRIMS/125 査読有り

[学会発表](計 11 件)

Osamu Fujino, Vanishing theorems for complex projective varieties, *The Asian Mathematical Conference 2016*, 2016年7月26日, Bali Nusa Dua Convention Center, Bali Indonesia.

Osamu Fujino, Injectivity theorems for pseudo-effective line bundles and its applications, *Pacific RIM Conference on Mathematics 2016*, 2016年6月28日, Seoul National University, Seoul Korea.

Osamu Fujino, On injectivity and vanishing theorems, *Workshop on L^2*

Extension theorems, 2016年2月16日, 東京大学数理科学研究科(東京都目黒区)

Osamu Fujino, Direct images of relative pluricanonical bundles, *Higher dimensional algebraic geometry and around*, Kobe–Kyoto, 2016, 2016年2月3日, 神戸大学大学院理学研究科(兵庫県神戸市)

Osamu Fujino, On the foundations of the minimal model program, *代数幾何学城崎シンポジウム*, 2015年10月23日, 城崎国際アートセンター(兵庫県豊岡市)

Osamu Fujino, On semi-log canonical pairs, *Algebraic Geometry 2015*, 2015年7月13日, University of Utah, Salt Lake City, Utah USA.

Osamu Fujino, Direct images of pluricanonical divisors, 2015 KAIST CMC Advanced School of Algebraic Geometry, 2015年4月20日~23日, Department of Mathematical Sciences, KAIST, Daejeon Korea.

Osamu Fujino, Direct images of pluricanonical divisors, *Conference of Hodge Theory and L^2 -cohomology*, 2014年11月23日, Johns Hopkins University, Baltimore USA.

Osamu Fujino, Subadditivity of the logarithmic Kodaira dimension for affine varieties, *Algebraic Varieties and Automorphism Groups*, 2014年7月7日, 京都大学数理解析研究所(京都市左京区)

Osamu Fujino, Variations of mixed Hodge structure and semipositivity theorems, *Conference on Positivity, Vanishing Theorems, and Applications*, 2014年5月15日, University of Lille 1, Lille France.

Osamu Fujino, Some applications of the semi-positivity theorems, *Birational geometry of complex algebraic varieties*, 2013年10月7日, CIRM, Marseille France.

[その他] ホームページ

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~fujino/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

藤野 修 (FUJINO Osamu)

大阪大学大学院理学研究科 教授

研究者番号：60324711