

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 24 日現在

機関番号：32511

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24700015

研究課題名(和文) 初等関数と特殊関数の高可搬で高精度かつ高信頼な高速計算手法の実現

研究課題名(英文) Development of Fast Numerical Algorithms for Elementary and Special Functions retaining High Reliability, High Accuracy and High Portability

研究代表者

山中 脩也 (Yamanaka, Naoya)

帝京平成大学・現代ライフ学部・助教

研究者番号：90548877

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：丸め誤差や打ち切り誤差などの全ての誤差を考慮した上で、数学的に正しい結果を数値計算によって導く計算法を精度保証付き数値計算と呼ぶ。本研究では、特定の初等関数や特殊関数の計算について、倍精度数だけを利用して(高可搬)、倍精度数の倍の精度を(高精度)、精度保証付きで達成する(高信頼)、既存手法より実行時間が早い(高速)、計算アルゴリズムの設計法を提案した。これにより、現在使っている計算機環境のまま、わずかなソフトウェアの変更で、従来の精度の倍の結果を精度保証付きで得られる高速なアルゴリズムの構築に成功した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to develop a framework of 4H-Algorithm for some elementary and special functions. Here, the 4H-Algorithm means a fast numerical algorithm retaining high reliability, high accuracy and high portability. In this research, we have proposed algorithms based on error free transformations for real elementary functions. Moreover, we succeeded in developing algorithms for some special functions based on an integration over semi-infinite interval, for example, the modified Bessel function of the second kind.

研究分野：数値解析

キーワード：高精度計算 誤差解析 精度保証付き数値計算

### 1. 研究開始当初の背景

本研究提案者は本研究課題の開始前に、積分区間の端点に特異点を持つ一変数関数の積分に対して、従来の近似計算と比べほぼ同じ時間で常に正しい結果を返す高信頼・高可搬・高速な数値積分法を提案した。提案手法は結果の相対誤差を保証するものであったが、この計算法を用いて倍精度数の倍の精度の結果を得るにはハードウェアの大幅な変更が必要と考えられていた。この問題の本質は高信頼・高可搬・高速という特徴を保ちながら高精度化を行なう難しさにあり、被積分関数の中で出現する基本演算（四則演算や平方根）でさえこれらを実現できず、積分結果の精度が向上しない直接的な原因となっていた。

この問題を解決するために本研究提案者は、エラーフリー変換を基礎とし、倍精度数のみでその倍の精度を達成する近似計算法を考案した。提案手法は結果が倍精度の倍に僅かに及ばないことがあるがほぼその精度を達成し、高可搬かつ高速という特徴を保ちつつ高精度化を達成した。さらに本研究提案者はこの手法を厳密に解析し、明示的な誤差上限の証明とその計算法を提案することで、高精度・高可搬・高速という特徴を保ちつつ高信頼な手法を達成した。

このような背景により、初等関数計算法の多くは基本演算（四則演算や平方根）を基に構成されるため、それまでに準備を重ねた技術を基礎として、初等関数計算法の高可搬で高精度かつ高信頼な高速計算手法を構成できると予想した。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、工学で頻繁に現れる初等関数（三角関数、双曲線関数、それらの逆関数）や特殊関数（誤差関数、ガンマ関数など）に対して、

高可搬

倍精度数のみ利用しどの計算機でも動く

高精度

倍精度の倍の精度の出力が可能

高信頼

すべての誤差を考慮し絶対間違えない

高速

既存手法と比べ高速

という 4 つの特徴を持つ計算アルゴリズム (4H-Algorithm : High portability, High accuracy, High reliability and High speed Algorithm) の設計法を構築することである。

これが実現されると容易に高速かつ高精度な計算を扱うことができるため、誤差の配慮という最も煩雑な部分からアルゴリズムの設計者を解放することが期待でき、工学の様々な分野で革命的な変革がおきると期待できる。また、倍精度数だけで倍精度数の倍の精度の結果を得るため、多倍長の計算手法

の道標となることが期待できる。

### 3. 研究の方法

本研究は、初等関数と特殊関数の高可搬で高精度かつ高信頼な高速計算法について研究するものであった。

平成 24, 25 年では、4H-Algorithm 設計の突破口になりうる初等関数を 2 クラスに分け、それぞれの 4H-Algorithm の原理的な可能性を明らかにした。ここで、2 クラスとは

1) 初等関数（双曲線関数・三角関数）

2) 初等関数（逆双曲線関数・逆三角関数）

である。

平成 26 年度以後は、前年度までの成果と既に実現された高精度・高可搬・高速な数値積分計算法を組み合わせ、特殊関数に関する高精度・高信頼・高可搬・高速な計算法 (4H-Algorithm) の体系的な構築法を明らかにした。

### 4. 研究成果

双曲線関数と三角関数の構築

初年度である平成 24 年度は四則演算の 4H-Algorithm とエラーフリー変換を組み合わせ、また、その誤差解析を行なう事で双曲線関数と三角関数の 4H-Algorithm を構築する事を目的とした。浮動小数点数を用いた数値計算システムで双曲線関数を計算する際は、桁を有限桁しか保持する事ができないことが原因となり大きなキャンセレーションが発生する。この問題に対し、キャンセレーションの根本的原因となる  $\exp(x)-1$  の部分に対し、計算法の中で計算することなく事前に保持することで大きなキャンセレーションを回避した。これにより双曲線関数は従来の高速性を失うことなく高精度な計算を行なう事ができるようになった。また、三角関数の計算においては、入力値が非常に大きな値であっても出力値は小さな結果になりうるため、入力値の引き戻しを行なう必要がある。しかしこの引き戻しの工程にはほぼ確実に計算誤差が混入してしまい、その結果出力値が小さいような入力では大きく間違った結果を返すことになっていた。この問題に対して、内部で必要な場所に必要な精度だけの高精度計算を用いた引き戻しを行なう事で、この問題を回避した。これには円周率の値を高精度に保持する必要があったが、エラーフリー変換に基づく方法を用いて、高精度な結果を得ることができるよう設計を行なった。また、両関数においてそれらで発生するすべての誤差を考慮した誤差解析を行ない、これらの 4H-Algorithm を達成した。

逆双曲線関数・逆三角関数

二年目である平成 25 年度は、平成 24 年度に達成した双曲線関数と三角関数の構築で得た知識と、四則演算の 4H-Algorithm・エラーフリー変換を組み合わせ、逆双曲線関数と逆三角関数の 4H-Algorithm を構築した。

これら逆関数の計算法は、従来利用していた浮動小数点数を和の形に分解する手法を直接利用することができず、これまで構築した技術を再利用することが非常に困難であった。この問題に対して、浮動小数点数を乗算の形に分解する新たな手法を考案し、従来利用していた和の形に分解する技術をベースとして逆関数計算の誤差解析を行ない、逆双曲線関数と逆三角関数の計算法の 4H-Algorithm の構築を行なった。

#### ガンマ関数

三年目である平成 26 年度は、これまでに達成した初等関数の 4H-Algorithm を組み合わせ、無限区間の精度保証付き数値積分法の構築を行った。これは、積分法によって計算される特殊関数計算法構築の基礎になり、特にガンマ関数の 4H-Algorithm 構築においては、大きな役割を果たす。これまで無限区間の精度保証付き数値積分法は一般的な方法としては構築されておらず、特定の問題に対し、無限区間を積分区間の長い有限区間とそれ以外の区間に分けて計算されていた。より具体的には、有限区間は従来の有限区間の精度保証付き数値積分を用い、それ以外の部分は関数の上限関数を考え、上限関数の積分値を解析的に求めたものを利用していった。そのため、精度と計算速度の両面で近似計算には大きく及ばないものであった。この問題に対し、無限積分として高精度な結果を得ることができる二重指数関数型数値積分公式を用いることで、高精度かつ高信頼な無限積分の値を得る計算法の構築に成功した。これには共同研究者である岡山による誤差評価式を利用している。この計算法を用いると、正則性の確認は必要になるものの、厳密な誤差上限を得ることができ、高精度な結果を得ることも容易になった。

#### 変形ベッセル関数

最終年度である平成 27 年度は、これまでに達成した初等関数の構築で得た知識と、四則演算の 4H-Algorithm・エラーフリー変換を組み合わせ、無限積分によって表現される特殊関数、特に変形ベッセル関数の精度保証フレームワークの構築を行った。これまで半無限区間の数値積分に対する精度保証法は、被積分関数ごとに数学的な解析が必要であったため、汎用的な精度保証法の構築は簡単ではないと考えられてきた。この問題に対して、近年、二重指数関数型積分公式に基づく誤差解析が行われ、半無限区間の積分を変数変換により、誤差解析の行いやすい形に変更する方法が提案された。この方法は、半無限積分を直接扱える点で画期的であるが、誤差定数の計算が簡単ではないという問題点があった。この問題点に対し提案手法では、従来手計算が必要であった箇所に、最大値の原理を基礎とする複素区間演算を用いることにより、半無限区間の誤差上限が汎用的に計

算できるようになった。

また、変形ベッセル関数の計算に於いては、被積分関数の中に指数減衰する項が含まれているが、それ以外の部分をブラックボックスとして計算を行うと、誤差定数が発散することがあった。この点に対し提案手法では、指数減衰項・多項式項・それ以外の部分に分け、被積分関数に多項式が含まれていても誤差定数が発散しない定理を与えた。この方法は、従来法では精度保証できない形状の半無限積分でも、被積分関数内の項を別個に取り扱うことで精度保証が行えることを示しており、この精度保証フレームワークが本研究課題を更に発展させ、より複雑な関数に対しても 4H-Algorithm を構築することができることを示唆している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① Naoya Yamanaka, Tomoaki Okayama, Shin'ichi Oishi, Yukari Maki, Verified Algorithm for the Modified Bessel Function of the Second Kind, 5th European Seminar on Computing Book of Abstracts, 査読有, 265, <http://www.esco2016.femhub.com/>
- ② Naoya Yamanaka, Tomoaki Okayama, Shin'ichi Oishi, Verified Error Bounds for the Real Gamma Function using Double Exponential Formula over Semi-Infinite Interval, Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences, 査読有, 9582, 2016, 224-228, DOI : 10.1007/978-3-319-32859-1
- ③ Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Interval Arithmetic and Its Implementations, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B54, 2016, 71-98, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>
- ④ Stef Graillat, Christoph Lauter, PING Tak Peter Tang, Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Efficient Calculations of Faithfully Rounded 12-Norms of n-Vectors, 査読有, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 41(4), 2015, DOI : 10.1145/2699469
- ⑤ Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Fast quadruple-double floating point format, 査読有, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol. 5, 2014,

15-34,  
DOI : 10.1587/nolta.5.15

- ⑥ Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Fast Multiprecision Algorithm Like Quad-Double Arithmetic, 査読有, 2013 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, 2013, <http://www-lab23.kuee.kyoto-u.ac.jp/nolta2013/>
- ⑦ 山中 脩也, 最近点への丸めによる区間演算, 数学セミナー, 査読無, 2012 年 10 月号, 2012, 16-20, <https://www.nippy.co.jp/shop/magazine/5959.html>
- ⑧ 山中 脩也, 大石 進一, 倍精度に基づく四倍精度四則演算法の誤差とその応用, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1791, 2012, 216-225

[学会発表] (計 25 件)

- ① Naoya Yamanaka, Tomoaki Okayama, Shin'ichi Oishi, Yukari Maki, Verified Algorithm for the Modified Bessel Function of the Second Kind, 5th European Seminar on Computing, 2016 年 6 月 9 日, ピルセン (チェコ)
- ② 山中 脩也, 岡山 友昭, 大石 進一, 榎友佳里, DE 公式を用いた変形 Bessel 関数の精度保証付き数値計算, 日本応用数理学会 研究部会連合発表会, 2016 年 3 月 5 日, 神戸学院大学 (兵庫県・神戸市)
- ③ Naoya Yamanaka, Tomoaki Okayama, Shin'ichi Oishi, Verified Error Bounds for the Real Gamma Function using Double Exponential Formula over Semi-Infinite Interval, Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences, 2015 年 11 月 12 日, ベルリン (ドイツ)
- ④ Naoya Yamanaka, Tomoaki Okayama, Shin'ichi Oishi, Verified Numerical Algorithm for Real Gamma Function using DE-Quadrature, CREST Workshop, 2015 年 10 月 25 日, ホテル伊東パウエル (静岡県・伊東市)
- ⑤ 山中 脩也, 特異性を含む積分計算での精度保証と高精度計算, 研究集会「数学と現象」, 2015 年 7 月 29 日, ホテル白岩 (東京都・大島町)
- ⑥ 山中 脩也, 大石 進一, ある形をした半無限積分の精度保証付き数値計算法, 精度保証付き数値計算の最近の展開, 2015 年 3 月 8 日~10 日, 北九州国際会議場 (福岡県・北九州市)
- ⑦ Stef Graillat, Christoph Lauter, PING Tak Peter Tang, Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, A method of calculating faithful rounding of l2-Norms for n-Vectors, 16th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, 2014 年 9 月 21 日~26 日, ヴェルツブルク (ドイツ)
- ⑧ 山中 脩也, 高信頼・高精度・高可搬な数値計算法, 計算数学研究集会, 2014 年 9 月 7 日~8 日, ホテルリードアズーロ (東京都・八丈町)
- ⑨ Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Fast quadruple-double floating point format, 2014 International Workshop on Numerical Verification and its Applications, 2014 年 3 月 17 日, 早稲田大学 (東京都・新宿区)
- ⑩ 山中 脩也, 大石 進一, 高速な疑似六倍精度・疑似八倍精度計算法の提案, 多倍長精度計算フォーラム 第 4 回研究会, 2014 年 3 月 7 日, 工学院大学 (東京都・新宿区)
- ⑪ 山中 脩也, 大石 進一, 倍精度浮動小数点演算を用いた高速八倍精度計算法, 日本応用数理学会 2013 年度年会, 2013 年 9 月 9 日~11 日, アクロス福岡 (福岡県・福岡市)
- ⑫ 山中 脩也, 大石 進一, 倍精度浮動小数点演算を用いた高速八倍精度計算法, 第 42 回数値解析シンポジウム, 2013 年 6 月 12 日~14 日, 道後館 (愛媛県・松山市)
- ⑬ 山中 脩也, 大石 進一, 倍精度浮動小数点演算を用いた高精度計算の高速化とその信頼性について, 九州大学 数値解析セミナー, 2013 年 5 月 17 日, アクロス福岡 (福岡県・福岡市)
- ⑭ 山中 脩也, 区間演算とその応用, 2012 年 若手の会 単独研究会, 2012 年 12 月 26 日, 東京大学 (東京都・文京区)
- ⑮ 山中 脩也, 精度保証付き数値計算法入門, 第 11 回「計算機を用いた数学研究」GCOE セミナー, 2012 年 11 月 30 日~12 月 1 日, 京都大学 (京都府・京都市)

- ⑯ 山中 脩也, 大石 進一, Chebyshev 級数展開を用いた多項式近似について, 環瀬戸内ワークショップ, 2012年11月17日~18日, 土庄町総合会館(香川県・小豆郡)
- ⑰ 山中 脩也, 特異点を持つ積分に対する精度保証付き数値計算法 - 積分における無限の評価, 第4回横幹連合総合シンポジウム, 2012年11月2日, 日本大学(千葉県・習志野市)
- ⑱ Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Accurate and Rigorous Logarithm Function Algorithm, 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, 2012年10月26日, パルマ(スペイン)
- ⑲ Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Fast infimum-supremum operations for double-double arithmetic, The 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, 2012年9月24日~26日, ノボシビルスク(ロシア)
- ⑳ 山中 脩也, 大石 進一, 数値積分の精度保証化技術・特異点を含む積分の高信頼な結果を得るために, 早稲田大学理工学研究所主催精度保証付き数値計算ワークショップ, 2012年8月29日~31日, 稚内全日空ホテル(北海道・稚内市)
- 21 Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Accurate and Rigorous Logarithm Function Algorithm in Rounding to Nearest, The 8<sup>th</sup> East Asia Section of SIAM Conference, 2012年6月25日, 台北(台湾)
- 22 Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Product Decomposition and Its Applications, 2012 SIAM Conference on Applied Linear Algebra, 2012年6月21日, バレンシア(スペイン)
- 23 Naoya Yamanaka, Shin'ichi Oishi, Fast Verified Division Algorithm for Double-double Arithmetic, Fifth Conference on Numerical Analysis and Applications, 2012年6月18日, ロゼネツ(ブルガリア)
- 24 山中 脩也, 柏木 雅英, 大石 進一, 対数特異性を持つ積分に対する精度保証付き数値積分法, 第41回数値解析シンポジウム, 2012年6月8日, しん喜(群

馬県・渋川市)

- 25 山中 脩也, 高精度で高可搬を精度保証付き高速初等関数計算法の構築, 第34回談話会, 2012年4月25日, 芝浦工業大学(埼玉県・さいたま市)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山中 脩也 (YAMANAKA, Naoya)  
 帝京平成大学・現代ライフ学部・助教  
 研究者番号: 90548877