様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 6 月 16 日現在

機関番号：13101
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2013
課題番号：24730728
研究課題名（和文）数学的リテラシー育成のためのカリキュラム開発に向けた基礎的研究

研究課題名（英文）A fundamental research on curriculum development to foster mathematical literacy

研究代表者
阿部　好貴（Abe, Yoshitaka）

新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授

研究者番号：40624630

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,100,000円、（間接経費）　330,000円

研究成果の概要（和文）：　本研究では，キーコンセプトである数学的リテラシーの捉え方を明確にし，その視点から数学教育カリキュラムの内容を批判的に考察し，関数領域そしてその他の領域との関わりについての課題を明確にした。それは，これまでの「関数」は数学的な構造の探究が強調される一方で，関数の応用的な側面が弱い，と概略まとめられる。他領域との関わりにおいても，その数学的な系統だけではなく，方法としての関数という視点から他領域との関わりを考慮する必要性を明確にしている。また，これらの課題に対して，本研究では「数学的モデル化」の捉え方を拡張した上で，それを初等教育算数から中等教育数学までのカリキュラム構成の軸として位置づけた。

研究成果の概要（英文）：In this research, mathematical literacy as a key concept is defined and domain of function in mathematics education curriculum is considered critically from this point of view. In this domain, although students have researched functional structures, they have not use function as a tool. And it is necessary that domain of function is linked to other one as the way of mathematical thinking. For this problem, this research clarified necessarily that extended mathematical modeling become the center of curriculum development from elementary to secondary.

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：数学的リテラシー　関数　数学的モデル化　カリキュラム開発

１．研究開始当初の背景

教育において「リテラシー」の問題がクローズアップされたのは，OECD の生徒の学習到達度調査（PISA）の影響によるものであると考える。それ以降，国際的な動向においても個人研究の水準においても数学的リテラシー研究は，新たな研究領域として研究が進められている。しかしそこでの研究は，数学的リテラシーという視点からの包括的な議論がなされる一方で，具体的なカリキュラムや学習指導に関する議論は弱く，主として数学の方法に着目した包括的な議論が先行しているといえる。そのため，具体的な数学的内容に関する議論も弱い。

２．研究の目的

本研究の目的は，数学的リテラシーの育成という視座から，主として算数・数学科における「関数」に関わる領域に着目し，現行カリキュラムの目標・内容・方法に関する課題を同定し，その課題解決に向けた方策を探ることである。「関数」に着目するのは，現行カリキュラムが最終的には微分・積分へと至る構成となっており，「関数」が実質的に現行カリキュラムの１つの頂点として機能していることからカリキュラム開発の核となりうるという点，さらに数学的リテラシーで重要とされる「現実世界と数学との往還」という視点から重要な領域であるという点の 2 点が主たる理由である。

３．研究の方法

本研究は，数学的リテラシーの捉え方の明確化をおこない，その視点から関数領域の目標および学習指導のあり方を探り，現行カリキュラムの批判的な考察をおこない課題を同定し，その課題解決に向けた方策を探る，という 3 段階でおこなった。

（1）数学的リテラシーの捉え方の明確化
本研究のキーコンセプトである「数学的リテラシー」の捉え方を明確にする。

（2）関数領域の課題の同定
関数領域の目標および学習指導のあり方を,数学的リテラシーや数学的活動といった視点から探る。

（3）カリキュラム構成の原理の開発
同定した課題に対する方策として,関数領域における数学的リテラシー育成のためのカリキュラム構成原理を構築する。

４．研究成果

上述の 3 段階に対する，それぞれの研究成果は以下の通りである。

（1）数学的リテラシーの捉え方の明確化

これまでのわが国の数学教育の目標は，伝統的に「数学的な考え方」に集約される。数学的な考え方は，実質陶冶と形式陶冶を総合しようとする中で生まれてきた一方で，これまでの「数学的な考え方」を総括すれば，数学を構成したり，創り出していく考え方に強調点が置かれてきた（長崎，2007）。

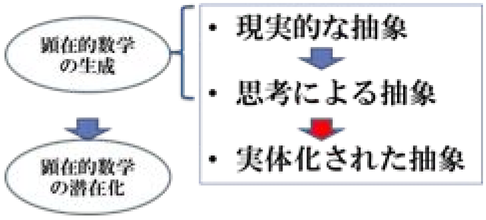
ヴィットマン（2004）は，数学を《「応用指向」と「構造指向」の２つの相補的側面をもつ「パターンの科学」》（p.53）として特徴付けている。この二分法に従えば，これまでのわが国の数学教育は「構造指向」に傾いていたことになる。このことは，社会を構築するための人材として，構造指向的な方法が必要とされたことに起因すると思われる。換言すれば，これまでの数学的リテラシーとして，構造指向の数学が強調されてきた。

しかしながら，今日そしてこれからの社会に目を向ければ，隅々まで数学が埋め込まれたような社会（「数学化された社会」）では，必要に応じて潜在的数学（implicit mathematics)を認識するリテラシーが不可欠になる。社会が数学化されるほどに，社会に実体化（realised）される数学の内容は，質的に高度化し，量的に増加することになる。それ故，これまでと同様に数学の内容という視点からカリキュラムを構成するのであれば，個人が学校において習得すべき内容は，大幅な増加を必要とするであろう。その意味で，今日の数学的リテラシーにとっては，構造よりはむしろ応用指向的数学の方法的側面への注目こそ重要であるといえる。

しかし，ここで注意すべきことは，応用指向の数学の方法のみに傾倒することを意味しない，ということである。今日の社会では，構造指向と応用指向の双方の数学が必要であり，したがって数学教育は両者のバランスを図ることが求められる。これまでのカリキュラムは，構造指向の数学に重心を置くことで，応用指向を保証するという考え方であった。数学は現実の頸木から脱するために，現象の抽象と捨象を繰り返して概念を精錬し，そのことによって一般化の端緒を開き，証明によって言明は普遍性をえることができた。この一連のプロセスが数学の現実への回帰を保証すると考えられてきた。確かに他の学問領域や科学・技術を経由して，社会の数学化に寄与してきたことは疑いようもない。しかし社会の数学化が進めばすすむほど，社会を構成する個人の脱数学化が促進されることも避けられない現実であり，このアイロニーを回避するための処方箋が教育に求められている。

しかし，「構造指向と応用指向の協調」に関して，フランス数学教授学者 Chevallard（2007）は，数学の有用性は数学教授の理由にはなりえないことを論じており，さらに，数学教授は「文化的手ほどき」であるとしている。この Chevallard の捉え方に，社会の

数学化プロセスを整合させたものが，下図となる。



本研究では，「文化的手ほどき」としての数学的リテラシー捉え方を，この枠組みによって明確化している。

（２）関数領域の課題の同定

数学的リテラシー育成という視点から，関数の学習指導に関して，「関数領域全体」，「関数領域の単元構成」，「関数の授業場面」という３つの水準から，その課題を同定した。

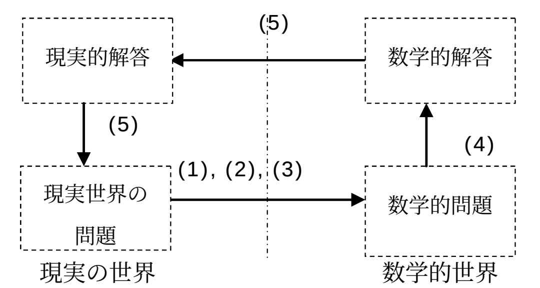
「関数領域全体」について，関数はその本性として関係を探るという「関数の考え」（方法）が強調される。また数学教育における関数の定義にも，問題解決が強く意識されている。その一方で，数と式や図形の領域と同様に，関数領域においても関数の典型としての比例，一次関数，二次関数に着目し，表・式・グラフを視点とした，それら関数の典型の考察・探求が主たる教授・学習活動となっている。つまり，関数領域においても，構造指向的な展開をおこなっている。

また，「関数の考え」という視点からみれば，構造指向的に展開される数と式や図形であっても，関数とは無関係ではない。したがって，構造指向的な数と式や図形と応用指向的な関数とをどのように接続するのか，ということは課題となろう。現在では解析幾何において，「数と式」が代数的な手法として，「図形」が幾何的な手段という形で統合される。これは恐らく関数領域そのものが構造指向的に展開されているからこそ整合的なのだと考える。したがって応用指向が前景とされる場合においては，その接続のあり方も再考が要請される。

「関数領域の単元構成」について，今日的な数学的リテラシー育成という視座からカリキュラム構成を考察するとき，Lange（1987）の数学的活動の枠組は参考になる。この枠組みは，オランダのいわゆる文科系を志望する生徒が履修する「数学 A」のカリキュラム構成の原理といってよい。これによって，「応用指向の強調における応用指向と構造指向の協調」という視点から，関数領域の単元構成の課題を述べれば，「現実の世界」における変化を抽象，捨象し関数を導き出し，「数学の世界」において，それを多様な表現で一般化し，その後応用する，というのがおよその展開となろう。既述したように，ここで強調されてきたのは抽象・一般化したのちの関数の式，であり事象の変化については，導入場面と応用場面で擬似的現実における変化が扱われるのみのである。

応用指向が強調される場合，「現実の世界」における関係あるいは変化を関数として抽象すること，またそれを用いて「現実の世界」を読み解くことが求められる。つまり，これまで関数の構造に重きがおかれていたものを，関数へと至るプロセス，そして，関数を「現実の世界」へと還元するプロセスの強調が求められる。ここで問題となることは，応用指向的な展開の中に，どのように構造指向を位置付けるか，という構造指向と応用指向の協調が問題になる。

「関数の授業場面」について，これまでの教授・学習は下図における「数学的世界」での活動に焦点があった。これを応用指向へとシフトする場合，「「現実の世界」と「数学の世界」との往還」が強調される。その往還，すなわち「現実の世界」からの抽象と「数学的世界」からの還元（reduction）の両者の教授・学習活動に課題があると考える。



(1)　現実に位置づけられた問題から開始すること。
(2)　数学的概念に即して問題を構成し，関連する数学を特定すること。
(3)　仮説の設定，一般化，定式化などのプロセスを通じて，次第に現実を整理すること。
(4)　数学の問題を解く。
(5)　数学的な解答を現実の状況に照らして解釈すること。

上記をまとめれば，関数はその目的において応用指向と整合的ではあるが，その構成・展開は構造指向的である。さらに最終的な到達点が関数学習の目的と整合していない。数学的リテラシーという視点からみれば，ここに課題がある。関数の本性としての応用指向的側面を学習内容として系統づけ，最終的にどこに至るべきかを考える必要がある。

（３）カリキュラム構成の原理の開発

数学的リテラシーを Chevallard の論考に基づき「文化的手ほどき」と捉えた上で，その育成のためのカリキュラム構成原理として，数学の方法に着目した。数学の方法は，内容と異なりその構造化に課題がある。それは，数学の方法の「一般性と固有性」そして「内容との接続」という２つの中心的課題によって構成されうる。この数学の方法の構造化という課題に対するアプローチとして，本稿では，数学的モデル化という視座から数学の方法を統一的にみることをおこなった。つ

まり，数学をすることは数学的モデル化であり，構造指向そして応用指向の両方の数学を数学的モデル化として捉えた。

数学的モデル化をモデルと原型との関係から捉え直し，その上で上述の枠組みと整合させた。第 1 段階の「現実的な抽象」では，算数の学習指導をみればわかるように，現実世界を原型として，その理解のために数学的モデルを構成し活用する。この場合， 学習指導の対象はモデルである。第 2 段階の「思考による抽象」では，未知の数学的概念（原型）を理解・構成するために，既知の数学的概念（モデル）を活用・修正する。この場合，学習指導の対象は原型である。

第 3 段階の「実体化された抽象」では，応用数学をみればわかるように，未知の現実世界（原型）を理解するために，既知の数学的モデルを活用する。この場合， 学習指導の対象はモデル化のプロセスそれ自体にある。また，3 つの抽象の段階の関連は，第 1 段階は原型としての現実世界からモデルを構成する活動であり，そこで構成されたモデルが第 2 段階の原型を理解・構成するためのモデルとなる。第 2 段階の原型は，現実に埋め込まれることによって第 3 段階のモデルとなる。このように捉えることによって，「文化的手ほどき」としての数学的リテラシーの鍵概念として数学的モデル化を位置づけた。

また，そのように捉えることからみえる，数学の方法の構造化に対する新たな課題として「一般化としての論証との接続」，「数学的モデル化と関数との関係からの方法と内容の接続」という 2 つの課題を同定した。

「一般化としての論証との接続」については，数学的モデル化は，数学を構成するという「発見の文脈」においては整合するが，それを一般化するという「正当化の文脈」には言及していない。一般化は，主として論証として議論されうる。したがって正当化としての論証を，数学的モデル化の中にどのように包含するのか，あるいは接続するのかを明確にする必要がある。これによって構造指向と応用指向の接続をどのように図るのか，そして他の数学の方法をどのように包含するのかを考える必要がある。

また「数学的モデル化と関数との関係からの方法と内容の接続」については，数学の方法と内容は不可分であり，数学の内容と方法をどのように関連付けるのかということも課題となる。現行カリキュラムは，代数，幾何，解析，統計・確率の 4 領域から構成されているが，それぞれの領域の特徴を数学の方法とどのように関連付けるのかが問題となる。現在の学習指導においては，これら 4 領域はいずれも構造指向的に展開されており，したがって応用指向と構造指向のバランスを考慮し，再構成することが求められると考える。数学的モデル化における原型とモデルの関係は，関数の機能と整合的である。また，解析幾何学が，「数と図形の統一」として発明されたことを考慮すれば，関数によって他領域を包括的に捉えることができる。現行カリキュラムは，微分積分を頂点とした構成と捉えることができるが，これは構造指向的展開であり，応用指向的な視点から関数によって内容を包括的に捉えることが重要である。つまり，数学的モデル化と関数との接続から，数学の方法と内容の接続を考えることが必要である。

このように，数学的リテラシー育成のためのカリキュラム構成の原理として，数学的モデル化を位置づけ，それによって関数を中心としたカリキュラムを構成する必要性を明確にしたことが本研究の成果である。

引用文献

Chevallard, Y. (2007). Implicit Mathematics: Their Impact on Societal Needs and Demands, Gellert, U. & Jablonka, E. (eds.) Mathematisation－Demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications, pp.57-65, Sense Publishers.

Lange, J. de. (1987). Mathematics, Insight and Meaning, OW&OC, Utrecht.

長崎栄三（1995).「関数の本質と考えさせる授業」，半田進（編著）『考えさせる授業 算数・数学－実践編』，pp.252-265，東京書籍.

長崎栄三 (2007).「数学的な考え方の再考」，長崎栄三・滝井章編著『算数の力を育てる ③ 数学的な考え方を乗り越えて』，pp.166-183，東洋館出版社.

OECD（国立教育政策研究所監訳）(2004).『PISA2003 年度調査　評価の枠組み』，ぎょうせい.

ヴィットマン，E. Ch.， ほか 2 名（國本景亀・山本信也訳）(2004).『PISA を乗り越えて：算数・数学授業改善から教育改革へ』，東洋館出版社.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）

① 阿部好貴，数学的モデル化からみた数学的リテラシーの捉え方，日本数学教育学会誌数学教育学論究臨時増刊，査読有，95 巻，2013，9-16.

② 阿部好貴，数学的リテラシーの捉え方に関する一考察：Chevallard の論考から，日本数学教育学会第 45 回数学教育論文発表会論文集，査読有，1 巻，2012，77-82.

〔学会発表〕（計４件）

① 渡邊光・後藤彩夏・嶋香穂里・阿部好貴，算数と数学の接続を目指した文字式の導入－任意定数と変数としての文字に着目して－，日本数学教育学会誌第 46 回秋季研究大会，2013 年 11 月 16 日，宇都宮大

学.
② 丸山侑里菜・小宮山翔平・鈴木元気・高橋耀一・阿部好貴，生命論に基づく分数の除法の教材開発－アルゴリズムの構築に焦点をあてて－，日本数学教育学会誌第 46 回秋季研究大会，2013 年 11 月 16 日，宇都宮大学.
③ 阿部好貴，数学的リテラシーの捉え方に関する基礎的研究：「文化的手ほどき」としての数学的リテラシー，全国数学教育学会第 37 回研究発表会，2013 年 2 月 2 日，広島大学.
④ 阿部好貴，数学的リテラシーという視点からみた関数領域のあり方に関する基礎的研究：関数領域の単元構成上の課題に着目して, 全国数学教育学会第 36 回研究発表会，2012 年 6 月 24 日，岡山大学.

６．研究組織
(1)研究代表者
阿部　好貴（ABE, Yoshitaka）
新潟大学・人文社会・教育科学系・准教授
研究者番号：40624630