

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 16 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24730730

研究課題名(和文) 数学学習における証明と論駁の活動を捉える枠組みの構築

研究課題名(英文) Construction of framework for describing students' activity of proofs and refutations in mathematical learning

研究代表者

小松 孝太郎 (KOMATSU, Kotaro)

信州大学・学術研究院教育学系・准教授

研究者番号：40578267

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、証明の学習の中でも、証明と論駁の活動に着目し、証明と論駁に関する生徒の活動を捉える枠組みを構築することを目的とした。この目的を達成するために、数理哲学者ラカトシュの主著『証明と論駁』の検討、及び中学校において授業の観察と分析を行った。そして、事柄を論駁する反例(大局的反例)への対応と、証明を論駁する反例(局所的反例)への対応に分けて、生徒の活動を捉える枠組みを構築した。

研究成果の概要(英文)：This study addresses mathematical activity of proofs and refutations, aiming to construct a framework for describing such activity by students in mathematical learning. For that purpose, I examined Proofs and Refutations (Lakatos, 1976), observing and analysing mathematical lessons in secondary schools. This study constructs a framework for describing students' reaction to a global counterexample, a counterexample that refutes a statement, and to a local counterexample, a counterexample that refutes a proof.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学教育 証明 論駁 反例 ラカトシュ 発見法的規則

1. 研究開始当初の背景

証明は数学の学問研究に特徴的な目的かつ方法であるとともに、証明の学習指導は創造的、論理的に考える力の育成に結び付く。このことから、近年、学校数学において証明の学習が重要であることは世界的に認知されている。ところが、多くの生徒が証明を構成することができない、証明を単なる学校での「儀式」としてしか認めていない等、証明の学習状況は我が国に限らず国際的に見ても望ましくない。こうした証明の学習状況を改善することが、数学教育に関する研究領域において国内及び国際的に重要な課題となっている。

本研究では、上述の課題を解決するために、次の二点に着目した。第一は、証明と論駁の活動を学校数学の場に位置づけることである。数理哲学者ラカトシュは、数学が証明と論駁を繰り返しながら発展してきたこと、及び推測を改良する際に証明が有効に機能することを、実際の数学の歴史を踏まえて示している。したがって、この証明と論駁の活動を学校数学に位置づけることは、数学の学問研究を反映した真正な学習を実現することにつながるといえる。さらに、生徒が証明と論駁の活動を体験することを通じて、証明を単なる儀式としてではなく、推測を改良するための有効な方法として捉えるようになることが期待される。

第二は、生徒の活動を捉える枠組みを構築することである。証明と論駁の活動は生徒にとって容易であるとは限らず、それゆえ生徒の活動を教師がいかに支援すべきであるかということが極めて重要な課題となる。もしも生徒の活動を的確に捉えるための枠組みを構築することができれば、生徒の実態に即した学習指導を展開することが可能になると期待される。

2. 研究の目的

以上より、本研究では、証明の学習の中でも、証明と論駁の活動に着目し、証明と論駁に関する生徒の活動を捉える枠組みを構築することを目的とした。

3. 研究の方法

本研究では、上述の研究目的を達成するために、次に示す手続きで研究を進めた。

(1) 暫定枠組みの構築

数理哲学者ラカトシュの著作『証明と論駁』を主要な研究として、他に数理哲学及び数学教育学の文献を参照する。これらの文献講読に加えて、研究代表者が所有する既存のデータの分析を通じて、生徒の活動を捉えるための枠組みを暫定的に構築する。

(2) 予備調査の実施と分析による暫定枠組みの洗練

中学校において授業観察を実施し、暫定的に構築した枠組みによってそれらの授業を記述することができるかどうか検討する。そ

して、記述できない授業が観察された場合には、暫定枠組みを修正する。

(3) 本調査の実施と分析による枠組みの有効性の検証

まず、(1)及び(2)の結果を踏まえて、生徒の活動を捉えるための枠組みを最終的に確定する。次に、中学校において授業観察を実施し、その枠組みによってそれらの授業を記述することができるかどうか検討する。そして、その検討を通じて、構築した枠組みの有効性を検証する。

4. 研究成果

本研究では、証明と論駁の活動の中でも、生徒が事柄あるいは証明を論駁する反例に直面した際にどのような対応をとるかに焦点を当てた。以下では、ラカトシュが用いた用語に基づき、事柄を論駁する反例(大局的反例)への対応と、証明を論駁する反例(局所的反例)への対応に分けて、研究成果を述べる。

(1) 大局的反例への対応

大局的反例に直面した場合の対応として、少なくとも、事柄の範囲を狭めて反例を除外する行為と、反例の場合に成り立つ事柄を新たに生成する行為が考えられる。

ラカトシュは、前者の行為として、「例外排除法」や「補題組み込み法」を挙げている。本研究では、まず研究代表者の既有データの分析に加えて、新たに中学校の授業観察(中学校第二学年:二等辺三角形の性質)を行った。その結果、いずれも上記二つの行為で記述できることが明らかとなった。そこで、本研究では、大局的反例に直面した場合の対応の中でも、事柄の範囲を狭めて反例を除外する行為については、例外排除法と補題組み込み法を枠組みの要素として挙げた。

一方、ラカトシュは、後者の行為として、「演繹的推量による内容の増加」を挙げている。これは、大局的反例の場合にも成り立つより一般的な事柄を、既有の証明を利用したり既知の事実を根拠としたりすることを通じて演繹的に生成することである。本研究では、まず研究代表者の既有データを分析したところ、この行為に該当する生徒の活動を実際に観察することができた。一方で、その後、中学校で授業観察(中学校第二学年:正方形や平行四辺形の性質)を行った結果、この行為に該当しない生徒の活動も観察された。具体的には、新たに生成した事柄が、当初の事柄と、一般/特殊の関係ではなく、場合分けの関係にある場合が見られた。また、新たな事柄を生成する方法として、類比的推論などの非演繹的な方法も観察された。

そこで、本研究では、大局的反例に直面した場合の対応の中でも、反例の場合に成り立つ事柄を新たに生成する行為については、次の二つの軸を設定し、それらの軸を組み合わせることで枠組みを構築した。第一は、新たに生成した事柄が、当初の事柄と一般/特殊

の関係にあるか、それとも場合分けの関係にあるかである。第二は、新たな事柄を生成する方法が、演繹的であるか非演繹的であるかである。

(2) 局所的反例への対応

ラカトシュは、局所的反例に直面した場合の対応として、まず、その局所的反例が大局的反例にもなっていないか検討することを挙げている。本研究では、研究代表者の既有データを分析したところ、この行為に該当する活動を観察することができた。なお、局所的反例が大局的反例であった場合には、その後の対応を捉える枠組みは、(1) と同一のものとなる。

一方、局所的反例が大局的反例でなかった場合については、ラカトシュは、局所的反例の場合にも成り立つより一般的な証明を生成する行為を挙げている。しかし、本研究では、中学校で授業観察(中学校第三学年:円周角の定理の証明, 円の性質の利用)を行ったところ、この行為に該当する生徒の活動は見られなかった。具体的には、生徒は、局所的反例に直面した際、当初の証明を修正することで局所的反例の場合に成り立つ証明を構成していたが、当初の証明と新たに構成した証明は、特殊/一般の関係ではなく、場合分けの関係にあった。

以上より、本研究では、局所的反例に直面した場合の対応として、まずその局所的反例が大局的反例にもなっていないか検討する行為を挙げた。そして、局所的反例が大局的反例になっていない場合の対応として、場合分けを通じて局所的反例の場合に成り立つ証明を構成するか、あるいは局所的反例の場合にも成り立つより一般的な証明を構成するかを、枠組みの要素として挙げた。

(3) 枠組みの構築と学習指導への示唆

本研究では、大局的反例への対応と局所的反例への対応に分けて、枠組みの要素を挙げた。最終的には、これらの要素を図式化して整理することによって、証明と論駁の活動を捉える枠組みを構築した。

本研究では、さらに、学習指導への示唆を導出することができた。具体的には、図が付された証明問題の中に、証明と論駁の活動を実現するための教材として有効なものがあることを指摘した。図が付された証明問題では、事柄は一般命題の形で述べられるのではなく、与えられた図と記号に即して示される。これらの証明問題の中には、与えられた図を変形すると、事柄の結論や構成した証明が成り立たなくなるものがある。本研究では、こうした証明問題を扱った授業を数多く観察してきた。この授業観察の結果から、これらの証明問題を扱い、与えられた図を変形する機会を生徒に与えることが、証明と論駁の活動を実現するために有効であることが示唆された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Komatsu, K., Tsujiyama, Y., & Sakamaki, A. (2014). Rethinking the discovery function of proof within the context of proofs and refutations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(7), 1053–1067. 査読有

DOI: 10.1080/0020739X.2014.902135

小松孝太郎・牧野圭介(2014). 「円周角と中心角の関係の活用」において課題探究として証明することの授業化」. 『日本数学教育学会誌 数学教育』, 第96巻第9号, pp. 26–29. 査読無

Komatsu, K., & Sakamaki, A. (2014). Invention of new statements for counterexamples. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 17–24). Vancouver, Canada. 査読有

Komatsu, K., Tsujiyama, Y., Sakamaki, A., & Koike, N. (2014). Proof problems with diagrams: An opportunity for experiencing proofs and refutations. *For the Learning of Mathematics*, 34(1), 36–42. 査読有

Komatsu, K., & Tsujiyama, Y. (2013). Principles of task design to foster proofs and refutations in mathematical learning: Proof problem with diagram. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education: Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 471–479). Oxford, United Kingdom. 査読有

Miyazaki, M., Chino, K., Katoh, R., Arai, H., Ogihara, F., Oguchi, Y., Morozumi, T., Kon, M., & Komatsu, K. (2012). Potentials for spatial geometry curriculum development with three-dimensional dynamic geometry software in lower secondary mathematics. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 19(2), 73–79. 査読有

[学会発表](計6件)

小松孝太郎・辻山洋介. 「学校数学における証明と論駁の活動を促すデザイン実験の構想」. 日本数学教育学会第47回秋期

研究大会・熊本大学・2014.11.8.

小松孝太郎・牧野圭介.「中学校第3学年における課題探究として証明することの授業化：第3学年の小単元「円周角と中心角の関係の活用」」.日本科学教育学会第38回年会・埼玉大学・2014.9.15.

小松孝太郎.「学校数学における反例や負例への対応に関する一考察」.日本数学教育学会第46回秋期研究大会・宇都宮大学・2013.11.17.

小松孝太郎・辻山洋介・坂巻主太・小池徳男.「学校数学における図が付された証明問題の可能性：ラカトシュの演繹的推量に焦点を当てて」.日本科学教育学会第37回年会・三重大学・2013.9.7.

永田潤一郎・小松孝太郎・中川裕之.「課題探究として証明することのカリキュラム開発：中学校数学科第三学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想」.日本数学教育学会第1回春期研究大会・筑波大学・2013.6.30.

Komatsu, K.. Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: Local-counterexample and modification of proof. The 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul, Korea. 2012.7.10.

〔図書〕(計1件)

小松孝太郎.『算数・数学教育における証明指導の改善』.東洋館出版社・2014・279頁.

6. 研究組織

(1)研究代表者

小松 孝太郎 (KOMATSU, Kotaro)
信州大学・学術研究院教育学系・准教授
研究者番号：40578267

(2)研究分担者

(3)連携研究者