

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 4 日現在

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24730744

研究課題名(和文)代数的推論に基づく算術から代数への移行過程に関する記号論的研究

研究課題名(英文)Semiotic research of transition from arithmetic to algebra based on algebraic reasoning

研究代表者

和田 信哉 (Wada, Shinya)

鹿児島大学・教育学部・准教授

研究者番号：60372471

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、代数的推論と記号論の観点から小学校算数の数と計算領域にかかわる内容の教材開発及びその実験授業を行うことをとおして、小学校算数から中学校数学への移行過程について、特に数と計算・式の領域に関する移行過程について明らかにすることである。その結果、次のような成果を得た。(1)図式的推論の観点から代数的推論をとらえ直したこと、(2)第2学年の教材開発及び実験授業によって児童の代数的推論の様相や統語論的認識から意味論的認識への移行の様相を明らかにしたこと、(3)第3学年の教材開発及び実験授業によって児童の乗法と除法の相互関係の認識の様相を明らかにしたこと。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to identify the transition processes from arithmetic to algebra through the development of teaching materials and teaching experiment of the teaching materials, from the viewpoint of algebraic reasoning and semiotics. As a result, we got the following findings. Firstly, we reconsidered the definition of algebraic reasoning from the viewpoint of diagrammatic reasoning. Secondly, we identified the aspects of algebraic reasoning and of shift from syntactic recognition to semantic recognition, through the teaching experiment in second grade. Finally, we identified the aspects of recognition of mutual relationships between multiplication and division, through the teaching experiment in third grade.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学教育学 算数から数学への移行 代数的推論 記号論

1. 研究開始当初の背景

小学校算数と中学校数学との乖離については、制度的側面や内容的側面などから指摘されてきており(岩崎, 2007), その一つとして、中学校数学において文字が導入されて代数へと移行していく際の困難が指摘されている(小山, 1988)。しかしながら、その困難に対する取り組みが効果を上げてきたとはいえない状況にあるため、近年になり、代数は算術の一般化であるという考えに基づいた初期の代数(Early Algebra)という立場が現れた。この立場では、代数は算術の一般化であるという考えから、小学校段階で、たとえ代数的な内容や記号を扱っていなくても代数的な推論は現れると考える。そのため、小学校段階での代数的推論を特定し、それに基づいてカリキュラム開発を進めている(Carraher & Schliemann, 2007)。本研究でも、このような立場から、小学校第6学年の分数の乗法・除法の授業を対象にして、記号論的視座から「一般性の認識」と「正当化」という観点で代数的推論を明確にし、乗法構造に関しては、第2学年の乗法の導入の具体的操作の問題点などを指摘している(和田, 2011)。

他方で、近年、指導内容の面からも、小学校算数と中学校数学との接続を意図した研究が行われており(岩崎, 2007), 数と計算・式の領域に関しては、接続前期として分数の除法(山口・岩崎, 2004)が、接続後期として負の数の加減(岡崎, 2003)が設定され、研究が進められている。しかしながら、初期の代数という立場からすると、小学校高学年から中学校第1学年に渡る学習内容だけでなく、小学校低学年から学習内容を見直していく必要がある。そのような見直しに関し、記号論的観点が重要となる。平林(1987)は、数学の言語的側面を重視し、言語学においては、言語の変形規則を主題とする統語論、言語とその対象との関係を主題とする意味論、言語を使用する解釈者や状況も主題とする語用論の順に研究が進むが、数学教育における子どもの実態は逆に進むことを指摘している。つまり、語用論から意味論、そして統語論というように子どもの式に対する見方が発達するということである。したがって、前述の先行研究が意味論から統語論への変容に着目したものであるととらえれば、語用論から意味論への変容に着目した研究も必要とされる。

以上の点に鑑み、本申請における研究では、子どもの思考の側面からと内容の言語的な側面から、小学校低・中学年における数の計算領域の改善に着目するに至った。

2. 研究の目的

これまでの研究で、代数的推論においても視覚的な図を用いることの重要性を指摘し、そのような子どもの思考を検討してきた。また、数学の言語性という観点から数学教育

における記号論の研究を行うとともに、小学校段階において代数的推論が現れうる学習内容を対象とした授業実践に関する研究も行ってきた。

そこで、本申請における研究では、小学校段階における代数的推論をさらに明確にしつつ、その推論と記号論を観点とした小学校低・中学年段階での数と計算領域の教材開発と授業構成の枠組みの構築、及びその実践的検討を行うことを目的とした。より具体的には、以下の3点を明らかにすることをねらいとした。

- (1)これまでの研究成果を整理し、小学校段階における代数的推論をさらに明確にすること。特に、図的表現と操作的表現を用いた代数的推論を図式的推論の観点から検討すること
- (2)代数的推論と記号論の観点から、小学校低・中学年段階の数と計算領域の学習内容を検討すること。特に加法構造としては第2学年の加法と減法を統合する単元、乗法構造としては第3学年の等分除と包含除が統合される単元を検討し、そこでの教材開発と授業構成の枠組みの構築を行うこと
- (3)(2)を実践的に検討すること

小学校算数から中学校数学への接続を考えれば、小学校でいえば高学年の学習内容を対象とすることが自然であるけれども、低学年の段階から式に対する見方を発達させていく必要がある。とりわけ、代数的な思考においては、ある操作とその逆操作との関係を認識することが重要であることも指摘されているので、低学年の段階から、加法と減法、そして乗法と除法の関係を認識させることが重要である。また、式の見方が語用論的な見方から意味論的な見方へと変容する過程で、加法と減法また乗法と除法の逆演算となっている関係を認識する際、解釈者である「私」にかかわる認識や状況を捨象していかなければならない。

これらの点が成功的に行われれば、式を計算としてみるだけでなく、式は関係を表すものであるという見方が形成され、高学年の式を対象としてみる見方へとつながり、中学校数学への接続がよりスムーズなものとなる。したがって、数学教育研究の重要な課題として位置づけられる小学校算数と中学校数学の接続に寄与する結果が得られうることに、本研究の意義がある。

3. 研究の方法

上記の目的を達成するために、次の三つの研究内容を設定した。

- (1)理論的視座の検討
代数的推論をとらえる視座として記号論

を援用しているが、その視点から代数的推論に対する示唆をさらに得るため、文献解釈的な方法によって再検討する。

(2) 第2学年の加法と減法の相互関係の教材開発及び実験授業

代数的推論及び記号論的視座から、第2学年の加法と減法の相互関係の教材を開発し、その実験授業の質的分析をとおして、子どもの代数的推論及び語用論的認識から意味論的認識への移行の様相を明らかにする。

(3) 第3学年の除法の導入の教材開発及び実験授業

代数的推論及び記号論的視座から、第3学年の除法の導入の教材を開発し、その実験授業の質的分析をとおして、子どもの乗法と除法の相互関係の認識及び等分除と包含除の相互関係の認識の様相を明らかにする。

4. 研究成果

上記の三つの研究内容に即して、研究成果について述べていく。

(1) 理論的視座の検討

代数的推論の明確な定義はないが、「一般化」や「正当化」などの共通してみられる特徴はある。また、より具体的な図的表現と操作的表現に基づく推論を代数的とみなすかどうかで意見が分かれるところとなる。本研究では、図的表現と操作的表現に基づく代数的推論を認め、それを具体的にに基づく代数的推論と呼んでいるが、すべてのそのような推論が代数的であるかは検討が必要である。

そこで、記号論の創始者の一人である Peirce の図式的推論 (diagrammatic reasoning) の観点から具体的にに基づく代数的推論を検討した。

図式とは、単なる図ではなく、「有力な関係の類似記号であり、慣習によってそのようなものとして用いられている表意体である。指標記号も、多少使用される。それは、完全に一貫した表象体系に基づいて実行されなければならない、単純にかつ容易に理解可能な基本的アイデアに基づいている」(CP4, 418) というものである。したがって、このような観点に従えば、推論の基になる表現の「構成規則」とその表現を操作する際の「操作規則」が重要となる。

この二つの規則を詳細にみてもと、操作規則は構成規則に暗黙的に含まれていて、それから導かれるものであることがわかる。したがって、図的表現と操作的表現の構成規則が重要になるが、その表現の対象(手続き/概念)と基盤(数の構造/数の関係・演算)という二つの視点で検討した結果、数の関係・演算を基盤に、そして概念を対象とした表現を用いた推論が代数的推論となりうることを指摘した。そして、このような結果を基にして、代数的推論の暫定的な規定を次の

ようにとらえた。

「規約性(構成規則と操作規則)を有する表現における数や演算の性質や関係などの関係性を見だし、それを演繹的に説明すること」

(2) 第2学年の加法と減法の相互関係の教材開発及び実験授業

代数的推論及び記号論的視座から、第2学年の加法と減法の相互関係の教材の課題とそれを克服する視点を次のように設定した。

関係式として試みるできない

具体的にに基づく代数的推論と抽象に基づく推論との相互作用により、はじめは具体的な関係式を認識させ、それを抽象的な関係式へと変容させる。

低学年では求答式と関係式が一致する

求答式と関係式の両者を理解させ、それらの関係性について考えさせる。その際には、図的表現を用いながら両辺に同じ形を見いだす方法も活用する。

図的表現から立式しない

ここで学習する図的表現(テープ図)はじめて学習するものなので、規約性を意識させて、児童たち自身にそれを協定させる。これによって、図的表現が思考の道具となるようにする。

図的表現に未知量を表す困難

図的表現をかく順序の無視と、具体的な関係式と抽象的な関係式の違いとの、関連を意識させる。

以上のことをふまえ、次のような指針で加法と減法の相互関係の単元を構成した。テープ図がはじめて出てくる単元でもあるから、はじめの4時間で、順思考の問題を用いて操作的表現あるいはドット図からテープ図へと移行させる。このテープ図は、教科書のような一つのテープではなく、加法と減法の相互関係を意識させるために三つの部分から成るテープ図を使用する。さらには、かく順序の問題も考慮し、操作可能なテープ図も用意する。また、大きな数を扱うことによって、操作的表現あるいはドット図などの限界を感じさせる。そして、テープ図の規約性は話し合いによって協定させるようにする。

次に、逆思考の問題を扱うことになるが、 $a + \quad = b$ (変化)、 $\quad - a = b$ (変化)、 $a - \quad = b$ (変化)を順に扱い、その後問題とテープ図との対応づけ、問題づくりと進めていく。それぞれの内容では、テープ図をかくとともに関係式を立て、求答式との関係性などに目を向けさせる。

その結果、次のような成果を得ることができた。

前述の困難をある程度克服することができた。

代数的推論の様相として次のようなものがみられた。

具体に基づく代数的推論 (ARC) の様相

ARC : 規約性の協定化

ARC : 比較による対象化

ARC : サンドイッチの操作

抽象に基づく代数的推論 (ARA) の様相

ARA : 確かめ算による逆

ARA : 部分 - 全体の図式

語用論的認識から意味論的認識への移行の様相として次のようなものがみられた。

最初の語用論的認識は、問題の状況の中にある「私(児童)」が、その答えを導く過程を表す道具として式を用いている状態である。そして、加法と減法の相互関係以前の学習によって、「私」が状況から脱するようになってきているが、式の見方は語用論的認識のように計算結果を表すものというままである。また、既に確かめ算も学習しているが、ここで図的表現によって視覚的にも反義性が認識される。しかし、逆思考の問題を考えることによって、式を問題場面の関係を表すものとしても認識し、それらの見方から求答式と関係式が導かれる。これらの式は、同じ問題から導かれたものであるから同じ意味を有しているはずなので、それらの式及びそれぞれの式の見方の関係性について考えることで代数的推論が働いて、それらの式の理解が深まり、式に関する認識が高まる。

(3) 第3学年の除法の導入の教材開発及び実験授業

代数的推論及び記号論的視座から、第3学年の除法の導入の教材の課題とそれを克服する視点を次のように設定した。

乗法と除法が逆の関係であることが明確ではない

教科書等では「求め方」としては九九を用いるということが強調されてはいるが、この単元で等分除と包含除の意味を統合する際に乗法との意味の関連は暗黙的である。3社は九九との関連でまとめる記述もあるが、あくまでも「計算」としての関連づけである。また、例えば $10 \div 5 =$ に対して、 $\times 5 = 10$ あるいは $5 \times = 10$ という記述はあり、もちろん、「1つ分」と「いくつ分」の違いを明確にはしているが、「乗法と除法が逆の操作である」ということは明示的ではない。したがって、1つの乗法の式の逆として、例えば、 $2 \times = 10$ と $\times 5 = 10$ で関連づけるべきであると考えた。

ただし、このような関連づけだと、様々な除法の意味を認識するという本来の目的とはずれが生じるかもしれない。そこで、はじめに乗法と逆の関係であることを認識させることで除法の意味の違いを認識させ、その次に「式表示」としては同じ除法になるとい

うことを認識させるようにしたい。そのために、関係式は乗法だが求答式は除法になるいわゆる乗法の逆思考の問題を用いることにする。

一貫した図的表現がない

加法と減法の相互関係のときには、それらを直観的に認識させるために、図的表現が重要な役割を担っていた。しかしながら、等分除と包含除の統合の際に活用される図的表現はなく、さらにいえば乗法構造に関する通学的に一貫した図的表現はない。そこで、今回は数直線図をモデルとし、単元の導入で乗法を取り上げ、それを数直線図で表すことを学ばせる必要があると考えた。その後、除法の導入の際に、等分除と包含除それぞれの導入における操作を数直線図に近い表現で表し、統合の際にそれを活用したい。

以上のことをふまえた単元構成のもと、実験授業を行った。その分析の結果、次のような成果を得ることができた。

乗法と除法の相互関係の認識

子どもたちは、「1つ分」を基にして、単元をとおして乗法と除法の関係を認識した。それは、数直線図から見いだされた見方であるので、数直線図を用いる効果があったということでもある。しかしながら、乗法の逆という関係について、子どもたちは、等分除の際は、確かめ算、見る方向、求め方、という観点でみており、包含除の際は、「操作が逆」とみていた。このような認識の違いをどのようにするかは今後の課題である。

等分除と包含除の相互関係の認識

この実験授業では、等分除と包含除の相互関係の認識の高まりもみられた。例えば、乗除の逆思考の問題を扱った際に、求答式(除法)は違うけど同じ図になるという認識や、求めるところが違っても図が同じという認識がみられた。同様に、単元の最後には、式は同じだけど分け方が違うという認識や、式は同じだけど図が違う、つまり操作が違うという認識もみられた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計5件)

和田信哉, 加法と減法の相互関係に関する研究 代数的推論の観点から, 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 査読有, 20(2), 2014, 77-9

和田信哉, 図的表現と操作的表現の規約性に関する研究 代数的推論の観点から, 鹿児島大学教育学部研究紀要 教育科学編, 査読無, 65, 2014, 31-48

和田信哉, 数学教育における表現活動に関する一考察, 鹿児島大学教育学部研究紀要 教育科学編, 査読無, 64, 2013, 29-38

和田信哉，分数の乗法・除法に関する代数的推論の機能に関する研究，日本数学教育学会誌，査読有，95(2)，2013，2-10
岡崎正和・岩崎秀樹・影山和也・和田信哉，図形の動的な見方の構造について：比喩的認識の視点から，日本教科教育学会誌，査読有，35(2)，2012，53-62

〔学会発表〕(計4件)

和田信哉，除法の導入に関する一考察，九州数学教育学研究会，2015年3月30日，福岡教育大学(福岡県宗像市)

和田信哉，加法と減法の相互関係の授業に関する研究 代数的推論の観点から，全国数学教育学会，2014年2月1日，広島大学(広島県東広島市)

和田信哉，数学教育における Diagrammatic Reasoning に関する一考察 代数的推論との関連について，全国数学教育学会，2013年2月2日，広島大学(広島県東広島市)

和田信哉，理論と実践をつなぐ教材論，全国数学教育学会，2012年6月24日，岡山大学(岡山県岡山市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

和田信哉 (WADA Shinya)

鹿児島大学・教育学部・准教授

研究者番号：60372471