

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：14701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740014

研究課題名(和文)セルバーグ跡公式による明示的次元公式を軸とした保型形式の対応予想の研究

研究課題名(英文) A study on correspondences of automorphic forms by using comparison of explicit dimension formulas

研究代表者

北山 秀隆 (KITAYAMA, Hidetaka)

和歌山大学・教育学部・講師

研究者番号：20622567

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：この研究では、平方因子を持たないレベルのパラモジュラー群に関する2次ジーゲルカusp形式の空間の明示的次元公式を導出し、それを用いて異なる保型形式の間での次元の関係式を記述した。それを応用して、2種類の予想を提唱した。まず第一に、既に知られていた素数レベルの場合を拡張する形で、L関数を保つ同型対応の予想を提唱した。第二に、不定符号四元数環から定義されるいわゆる非分裂型シンプレクティック群に関する2次ジーゲル保型形式の空間への1変数保型形式の空間からのリフティングの予想を提唱した。さらに、判別式が6の場合のL関数を具体的に計算することにより上記予想の数値的根拠を与えることにも成功した。

研究成果の概要(英文)：In this study, we obtained an explicit dimension formula for spaces of Siegel cusp forms of degree two with respect to paramodular groups of squarefree level, and also a relation between dimensions of spaces of different automorphic forms. As an applications, we proposed two conjectures. First, we proposed a conjecture on a correspondence which preserves L-functions. It is a generalization of a known conjecture for the cases of prime level. Second, we proposed a lifting conjecture for Siegel modular forms with respect to non-split symplectic groups from elliptic cusp forms. In addition, we carried out explicit calculations of L-functions in the case of discriminant 6 and gave numerical evidence of the above conjectures.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 次元公式

1. 研究開始当初の背景

SL(2;R)とSU(2)のそれぞれの保型形式の空間の間にL関数を保つ同型対応が存在することが1950年代にアイヒラーによって証明された。その後、表現論的見地から整備され、さらに一般化された予想も提唱されている。一方で、これとは独立に、1960年代に伊原康隆氏によって、アイヒラーによる対応定理を高次のシンプレクティック群の場合に拡張しようとする問題が提唱された。この問題は、1980年代以降、セルバーグ跡公式の詳細な計算から明示的な次元公式を導出し両サイドの次元の明示的な関係式を導くという手法を用いて、橋本喜一郎氏と伊吹山知義氏によって詳しく研究され、対応する離散群を特定した具体的な対応予想が提唱されている。

2. 研究の目的

しかし、これらの対応予想は、素数レベルの場合しか扱っておらず、一般レベルの場合にはどのような対応が有り得るのかは研究されていなかった。その理由は、研究の鍵となる明示的次元公式が素数レベルの場合でしか知られていなかったからである。これは多変数ジークル保型形式の場合の明示的次元公式の導出が1変数保型形式の場合に比べて格段に難しくなってしまうことに起因する。この研究の目的は、2次ジークルカスプ形式の空間の明示的次元公式を導出する研究を、今までなされていなかった拡張されたレベルにおいても実行し、それを応用して今まで知られていなかったレベルでの対応予想の研究を行うことである。

3. 研究の方法

セルバーグ跡公式による次元公式の研究はさまざまな観点から行われてきたが、若槻聡氏は2次ジークルカスプ形式の場合に、各共役類ごとの(正確には各ファミリーごとの)次元公式への寄与を記述した。しかし、具体的に離散群を指定して、次元の数値を決定できるという意味での明示的次元公式を導出するためには、共役類の分類やそれに伴う種々の計算など容易なことではまったくなく、実際に知られている例は多くない。実際の研究においては、半単純共役類と非半単純共役類とで状況は大きく異なる。非半単純共役類に関しては、共役類の分類(ファミリーの分類)がやるべき主な課題であり、それができれば若槻氏の結果を適用して各ファミリーごとの次元公式への寄与を明示的に決定することができる。その為の基礎としてカスプの同値類の分類の結果を適用できる。パラモジュラー群に関しては、完全に一般レベルの場合でもカスプの分類が既にCris PoorとDavid Yuenにより与えられている

ので、これを利用してファミリーの分類の計算を実行した。一方で、半単純共役類に関しては、大域的な共役類の分類ではなく、局所的な計算に帰着させて寄与を決定する方法を用いる。レベルを割らない素数についての必要な局所データは既に橋本喜一郎氏と伊吹山知義氏の論文に与えられていた。レベルを割る素数については、必要な局所データは一部の例外を除いて伊吹山氏の論文で与えられていた。従って、今回の研究で必要だったことは、レベルを割る素数についての一部計算されていなかった局所データの計算を補完し、その上で、すべての局所データを慎重に組み上げることである。

4. 研究成果

(1) 若槻聡氏による次元公式と、橋本喜一郎氏と伊吹山知義氏による楕円共役類についての局所データを用いて、平方因子を持たないレベルのパラモジュラー群に関する2次ジークルカスプ形式の空間の明示的次元公式を導出した。これは、伊吹山知義氏によって得られていた素数レベルでの公式を拡張したものである。さらに、この結果を応用して、以下の(2)~(4)の結果を得た。これらは、伊吹山知義氏との共同研究である。(2) 上記の新しい明示的次元公式と既存の公式を比較することにより、保型形式の空間の次元の間の明示的な関係式を得ることができ、それを根拠の一つとして、保型形式の空間の間の対応予想を提唱した。これも伊吹山知義氏によって素数レベルの場合にすでに知られていた予想の拡張であるが、今回の場合は不定符号の四元数環から定義されるいわゆる非分裂型シンプレクティック群の場合も含まれており、それについての予想は今まで知られていなかったものである。

(3) さらに、上記の次元の関係式から、1変数モジュラー形式の空間から非分裂型シンプレクティック群に関する2次ジークルモジュラー形式の空間へのリフティングの予想を提唱した。判別式6の不定符号四元数環の場合に具体的にヘッケ作用素の数値実験を行い、L関数を計算することにより、このリフティングの数値的根拠、および(2)の対応予想におけるL関数の一致の実例を得た。これは、自分自身によって得られていた、非分裂型シンプレクティック群に関する2次ジークル保型形式のなす次数環の構造定理を応用したものである。ベクトル値の場合の構造定理はまだ1例も知られていないが、ウェイトが小さい場合には微分作用素を用いて具体的に構成することができ、ベクトル値の場合のL関数の数値実験も実行した。この場合にもリフティング予想と完全に合致する結果を得た。

(4) 以上の結果(のほとんどの部分)について、伊吹山知義氏との共著論文を執筆し学術雑誌に投稿した。現時点ではまだ査読中

ある。

(5) 申請当時は想定していなかったことであるが、明示的次元公式の研究のための共役分類の技術は、ガロアの逆問題を背景とするいわゆるネーター問題などの不変体有理性問題の研究へも活用することができた。特に、有理関数体への準単項作用という広い概念を定義し、M. Kang 氏・星明考氏との共同研究で2次元の場合の不変体有理性問題を完全に解決した。星氏との共同で、3次元の研究も進展している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

著者名：H. Kitayama,

論文表題：On the explicit dimension formulas for spaces of Siegel cusp forms of degree two and their applications,

雑誌名：Automorphic Forms: Research in Number Theory from Oman, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.

査読の有無：有

巻、年、頁：115 巻、2014 年、137 - 150
DOI: 10.1007/978-3-319-11352-4_10

著者名：M. Kang, A. Hoshi and H. Kitayama,

論文表題：Quasi-monomial actions and some 4-dimensional rationality problems

雑誌名：Journal of Algebra

査読の有無：有

巻、年、頁：403 巻、2014 年、363 - 400
DOI: 10.1016/j.algebra.2014.01.019

[学会発表](計7件)

発表者名：H. Kitayama

発表表題：Rationality problem for quasi-monomial group actions,
学会名：New Developments in Algebraic Geometry

発表年月日：2014年9月5日

発表場所：台北(台湾)

発表者名：H. Kitayama

発表表題：On Siegel modular forms with respect to non-split symplectic groups
学会名：Explicit theory of automorphic forms

発表年月日：2014年3月24日

発表場所：上海(中国)

発表者名：H. Kitayama

発表表題：Rationality problem for quasi-monomial actions

学会名：One-day workshop of algebra

発表年月日：2013年8月19日

発表場所：台北(台湾)

発表者名：北山秀隆

発表表題：Rationality problem for purely monomial group actions

学会名：大阪大学整数論・保型形式セミナー

発表年月日：2014年11月28日

発表場所：大阪大学(大阪府豊中市)

発表者名：北山秀隆

発表表題：The rationality problem for purely monomial group actions

学会名：早稲田整数論セミナー

発表年月日：2014年12月20日

発表場所：早稲田大学(東京都)

発表者名：北山秀隆

発表表題：ネーター問題入門

学会名：西早稲田数論セミナー「ネーター問題をめぐって」

発表年月日：2013年9月11日

発表場所：早稲田大学(東京都)

発表者名：北山秀隆

発表表題：Dimension formulas of paramodular forms of squarefree level and comparison with inner twist

学会名：Workshop on Modular Forms

発表年月日：2012年9月29日

発表場所：九州大学(福岡市)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織

(1)研究代表者

北山 秀隆 (KITAYAMA,Hidetaka)
和歌山大学・教育学部・講師
研究者番号：20622567

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし